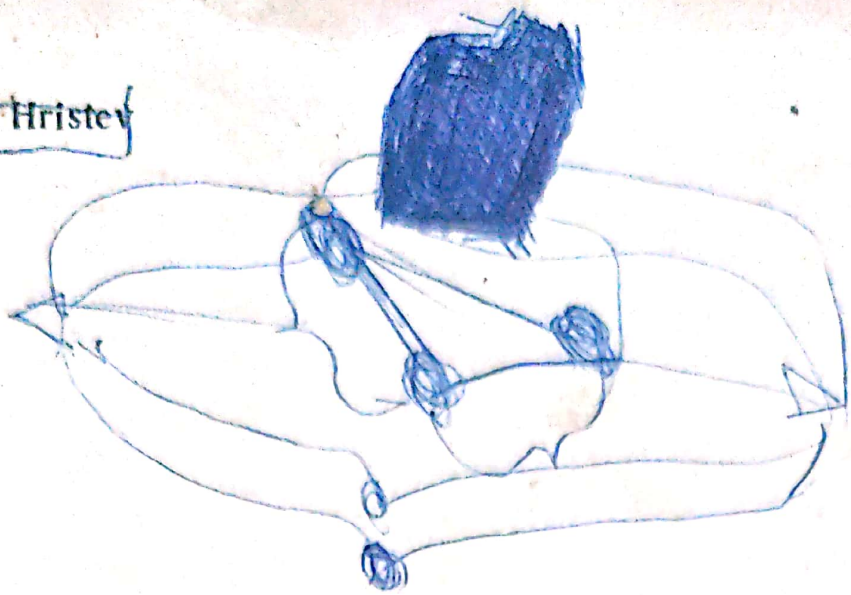
A. Hristev V. Fălie



26 Carmen Antonovici

Elemente de mecanică

pentru anul II liceu, clase speciale de fizică

Editura didactică și pedagogică — București, 1973

Scanned with OKEN Scanner

A. Hristev V. Fălie

BIBLIOTECA PERSONALĂ
Nr. .....
Carmen Antonovici

Elemente de mecanică

pentru anul II liceu, clase speciale de fizică

(Experimental)

Editura didactică și pedagogică — București

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea a fost întocmită pe baza programei aprobate de Ministerul Educației și Învățământului

Redactor : **Enescu Gheorghe**
Tehnoredactor : **Ionescu Victoria**

Scanned with OKEN Scanner

Carmen Antonovici

Notă

Lecţiile de faţă se adresează elevilor din clasele speciale de fizică, deci acelora pentru care fizica constituie obiectul principal de studiu şi care au dovedit aptitudini pentru această ştiinţă.

Autorii îşi dau seama că materialul prezentat nu poate fi expus în întregime la orele de curs şi deci profesorul va fi nevoit să lase deoparte unele teme mai dificile. Totuşi, pentru informarea şi stimularea elevilor mai dotaţi şi mai entuziaşti, autorii au crezut de cuviinţă să introducă şi unele teme mai dificile.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

Cuprins

Introducere 9

Cap. I. Statica

1.1. Forţa 12
1.2. Sistem de forţe concurente 12
1.3. Versorul unei axe 13
1.4. Proiecţia unei forţe pe o axă 14
1.5. Proiecţiile unei forţe pe două axe de coordonate ortogonale . 15
1.6. Proiecţiile unei forţe pe trei axe de coordonate ortogonale . 16
1.7. Metoda analitică de compunere a forţelor concurente . . . 18
1.8. Echilibrul forţelor aplicate unui punct material 19
1.9. Aplicaţii 19
1.10. Momentul unei forţe în raport cu un punct 21
1.11. Teorema lui Varignon 25
1.12. Momentul unei forţe în raport cu o axă 26
1.13. Relaţia dintre momentul unei forţe în raport cu o axă şi momentul forţei în raport cu un punct 27
1.14. Cuplu de forţe 27
1.15. Momentul unui cuplu 28
1.16. Compunerea cuplurilor situate în acelaşi plan 30
1.17. Caracterul forţelor care acţionează asupra solidului rigid . 32
1.18. Reducerea unui sistem de forţe 34
1.19. Echilibrul solidului rigid 35
1.20. Probleme rezolvate 36

Probleme 39

Cap. II. **Cinematica şi dinamica mişcării curbilinii a punctului material**

2.1. Relativitatea mişcării. Sistem de referinţă 41
2.2. Traiectoria 41

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

2.3. Cinematica punctului material 42
2.4. Modul de descriere a mişcării punctului material 42
2.5. Viteza scalară 44
2.6. Vectorul viteză 45
2.7. Vectorul acceleraţie 46
2.8. Acceleraţia tangenţială şi acceleraţia normală 47
2.9. Mişcarea rectilinie a proiecţiilor unui mobil M pe axele de coordonate Ox şi Oy 48
2.10. Mişcarea circulară uniformă 49
2.11. Viteza liniară şi viteza unghiulară 50
2.12. Perioadă. Frecvenţă 51
2.13. Acceleraţie normală 51
2.14. Mişcarea circulară uniform variată 52
2.15. Dinamica mişcării circulare uniforme a punctului material . 56
2.16. Înclinarea drumurilor la curbe 59
2.17. Centrifuga 60
2.18. Aplicaţie. Regulatorul cu bile. Pendulul conic 61
2.19. Energia cinetică a punctului material în mişcare circulară . 62
2.20. Momentul cinetic al punctului material în mişcare circulară . 62

Probleme 65

Cap. III. **Dinamica sistemului mecanic**

3.1. Sistem mecanic 66
3.2. Sistem 67
3.3. Forţe externe 67
3.4. Forţe interne 67
3.5. Solidul rigid 69
3.6. Impulsul total 69
3.7. Conservarea impulsului total 71
3.8. Momentul cinetic total 72
3.9. Energia cinetică totală 73
3.10. Mişcarea centrului de masă 74
3.11. Exemple 76

Cap. IV. **Dinamica solidului rigid**

4.1. Translaţia 79
4.2. Rotaţia 79
4.3. Energia cinetică de rotaţie 81
4.4. Momentul de inerţie 82
4.5. Momentul cinetic 86

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

4.6. Legea inerției 88
4.7. Legea fundamentală 89
4.8. Puterea și lucrul mecanic 90
4.9. Conservarea momentului cinetic 91
4.10. Analogia dintre mișcările de translație și de rotație . . . 94
4.11. Giroscopul 96
4.12. Axe libere (spontane) 102
4.13 Exemple 104

Probleme 109

Cap. V. **Sisteme de referință neinerțiale**

5.1. Sisteme de referință inerțiale 112
5.2. Compunerea vitezelor 112
5.3. Compunerea accelerațiilor 115
5.4. Exemple 117
5.5. Forțe complementare 119
5.6. Exemple 122
5.7. Aplicații la mișcarea de rotație a Pământului 124
a) Direcția firului cu plumb 124
b) Căderea liberă 125
c) Pendulul Foucault 126
d) Legea lui Bär 126
5.8. Probleme rezolvate 127

Probleme 128

Cap. VI. **Gravitația universală**

6.1. Evoluția istorică a ideilor despre univers 130
6.2. Greutatea corpurilor 135
6.3. Legea gravitației universale 135
6.4. Constanta gravitațională 137
6.5. Măsurarea constantei gravitaționale 137
6.6. Deducerea legilor lui Kepler 139
6.7. Calculul masei Pământului 141
6.8. Calculul masei Soarelui 141
6.9. Cîmpul gravitațional 142
6.10. Intensitatea cîmpului gravitațional 142
6.11. Energia potențială 143
6.12. Potențialul cîmpului gravitațional 146
6.13. Energia de interacțiune a unui sistem de particule 147

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

6.14. Liniile de cîmp 147
6.15. Variaţia acceleraţiei gravitaţionale 148
6.16. Aruncarea corpurilor sub un unghi faţă de orizontală . . 149
6.17. Sateliţi artificiali 152
6.18. Viteze cosmice 154
6.19. Imponderabilitatea 158
6.20. Probleme rezolvate 159

Întrebări şi probleme 164

Cap. VII. **Mecanica relativistă**

7.1. Principiul relativităţii al lui Galilei 171
7.2. Transformările lui Galilei 173
7.3. Postulatele teoriei relativităţii. 175
7.4. Transformările lui Lorentz 176
7.5. Contracţia lungimilor şi dilatarea duratelor. 178
7.6. Compunerea vitezelor 130
7.7. Impulsul şi masa 181
7.8. Energia 182

Probleme 184

Cap. VIII. **Mecanica fluidelor ideale**

8.1. Starea fluidă 186
8.2. Hidrostatica 187
8.3. Presiunea hidrostatică 187
8.4. Legea lui Pascal 189
8.5. Legea lui Arhimede 190
8.6. Mişcarea fluidelor 191
8.7. Ecuaţia de continuitate 193
8.8. Ecuaţia lui Bernoulli 193
8.9. Aplicaţii 197
8.10. Viscozitatea 200
8.11. Formula lui Poieuille 202
8.12. Legea lui Stokes 203
8.13. Efectul Magnus 204
8.14. Curgerea turbulentă 205
8.15. Căderea unui corp în aer; viteza limită. 207
8.16. Zborul avioanelor 208
8.17. Probleme rezolvate 209
Întrebări şi probleme 211

BIBLIOTECA PERSONALĂ Nr. ..... Carmen Antonovici

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Introducere

0.1. **Mecanica — știință a naturii.** Lumea fizică este alcătuită din materie în permanentă mișcare și transformare în spațiu și timp. Structura materiei, proprietățile ei și legile de mișcare a materiei le studiază fizica. Cea mai simplă formă de mișcare a materiei o constituie deplasarea reciprocă a corpurilor materiale de dimensiuni uzuale. Această formă de mișcare, cu o aproximație destul de mare, se poate studia independent de alte fenomene. Acest fapt a făcut să apară *mecanica* — știința despre cea mai simplă formă de mișcare.

Mecanica a fost prima teorie fizică și a servit ca model pentru celelalte care au apărut ulterior, avînd o importanță deosebită asupra dezvoltării fizicii teoretice.

Mecanica este o știință a naturii, care studiază echilibrul și mișcarea relativă a corpurilor, precum și interacțiunile dintre corpuri care influențează această mișcare.

Corpurile din natură acționează unele asupra altora reciproc, apar perechi de acțiuni numite interacțiuni.

Interacțiunea dintre corpuri implică ideea de evoluție și de conexiune spațială și temporală și se manifestă ca fenomene guvernate de legi fizice.

Mecanica descrie, explică și caută să prevadă fenomenele naturii pornind de la anumite date inițiale — condiții inițiale.

Descrierea se face în spațiul fizic cu trei dimensiuni și în timp; spațiul și timpul fiind formele de existență a materiei.

Explicația constă în formularea unei legi fizice care să se aplice fenomenelor observate și studiate și care să determine o legătură dintre

cauză și efect. Explicația se face în cadrul unei teorii capabilă să furnizeze elemente de previziune științifică.

Mecanica, în funcție de caracterul problemelor studiate, se împarte în trei părți:

a) Statica, care studiază legile de compunere a forțelor și condițiile de echilibru al corpurilor sub acțiunea forțelor.

b) Cinematica care studiază mișcările mecanice din punctul de vedere al proprietăților lor geometrice, spațio-temporale.

c) Dinamica care studiază legile de mișcare a corpurilor sub acțiunea forțelor exterioare.

După natura obiectelor studiate mecanica se divide în următoarele părți:

a) Mecanica punctului material.

b) Mecanica sistemelor de puncte materiale.

c) Mecanica solidului rigid.

d) Mecanica corpurilor de masă variabilă (corpuri a căror masă variază în timp).

e) Mecanica solidelor deformabile.

f) Mecanica fluidelor (hidromecanica, aeromecanica și dinamica gazelor).

Broșura de față nu are ca scop tratarea completă a temelor de mecanică prevăzute în programele de liceu ci doar revederea, aprofundarea sau completarea cunoștințelor de mecanică studiate în anii precedenți în cadrul lecțiilor de fizică.

Este necesar ca înainte de a începe studiul temelor cuprinse în această broșură, să facem cîteva precizări asupra cîtorva concepte pe care le vom folosi în cele ce urmează.

0.2. **Punctul material.** Un corp ale cărui dimensiuni sînt neglijabile față de distanțele de la acesta la corpurile înconjurătoare se numește *punct material*. Acesta este caracterizat numai prin masa sa. Punctul material nu efectuează mișcări de rotație în jurul vreunei axe trecînd prin el însuși.

Punctul material nu este un obiect fizic real; el este un model folosit în fizică, în scopul ușurării studiului anumitor fenomene.

Fizica, ca de altfel orice știință, nu studiază toate proprietățile individuale ale fiecărui obiect material, ci numai acele proprietăți

Scanned with OKEN Scanner

care sînt esențiale, caracteristice și stabile ale obiectului. Acest ansamblu de proprietăți constituie un model al materiei pentru știința respectivă. Cu ajutorul modelului pot fi studiate indirect proprietățile și transformările unui sistem complex cu care modelul prezintă o anumită analogie. Cu cît un model al materiei este mai simplu, cu atît poate fi studiat mai ușor pe cale matematică.

0.3. **Sistem mecanic.** Un sistem de puncte materiale supuse la legături reciproce (forțe de interacțiune) astfel încît să formeze un „întreg", mai mult sau mai puțin stabil, mai mult sau mai puțin deformabil, se numește *sistem mecanic*. Sistemul mecanic este de asemenea un model fizic (a se vedea § 3.1 și § 3.2).

0.4. **Solidul rigid** este un sistem mecanic caracterizat prin aceea că distanțele mutuale dintre elementele care îl alcătuiesc nu se modifică în procesul mișcării mecanice (vezi § 3.5).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

Statica

Statica studiază echilibrul corpurilor sub acțiunea forțelor. Statica este un caz particular al dinamicii, cînd pentru fiecare punct al corpului $\vec{a} = 0$ și $\vec{v} = 0$.

1.1. **Forța.** Starea de echilibru sau de mișcare a unui corp depinde de caracterul legăturilor sale mecanice cu celelalte corpuri, adică de apăsările, atracțiile sau respingerile ce rezultă din acțiunile lor reciproce. Mărimea fizică care exprimă măsura cantitativă a interacțiunii mecanice a corpurilor se numește *forță* . Forța caracterizează mărimea, direcția și sensul unei interacțiuni. Rezultă că forța este o mărime vectorială.

1.2. **Sistem de forțe concurente.** Dacă asupra unui corp acționează simultan mai multe forțe spunem că acestea formează un *sistem de forțe*. Cînd suporturile forțelor se întîlnesc în același punct forțele sînt concurente.

Să considerăm un corp asupra căruia acționează sistemul de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ aplicate în punctele $A, B, \ldots, N$. Ne propunem să înlocuim acest sistem cu unul mai simplu care să dea același efect mecanic. Vom rezolva problema mai întîi în ipoteza cînd corpul este aproximat cu un punct material și apoi cu un solid rigid.

În cazul cînd corpul este considerat un punct material, adică dimensiunile lui sînt neglijabile, distanțele dintre punctele de aplicație ale forțelor, fiind foarte mici, acestea se pot confunda într-un singur punct pe care îl notăm cu O (fig. 1.1, *a* și *b*). Rezultă că forțele care acționează asupra punctului material sînt concurente.

Scanned with OKEN Scanner

Reducerea unui sistem de forțe concurente se face cu ajutorul regulilor cunoscute: regula paralelogramului sau regula poligonului forțelor. În acest caz sistemul de forțe se reduce la o forță unică numită rezultanta

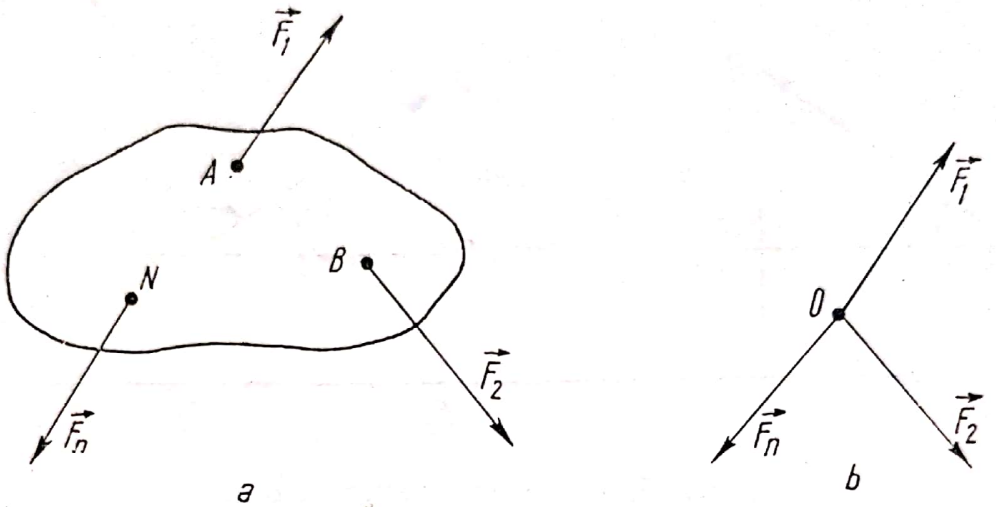


Fig. 1, a și b. Forțele care acționează asupra unui solid rigid au același punct de aplicație dacă se neglijează dimensiunile corpului, acesta aproximîndu-se cu un punct material.

sistemului. Asupra acestor metode de reducere a forțelor nu vom mai insista, fiind cunoscute. Vom folosi metoda analitică de reducere a forțelor.

1.3. **Versorul unei axe**. Axa este o dreaptă pe care s-a ales o origine O, o unitate de măsură și un sens pozitiv. Unitatea de măsură și orientarea axei (direcția și sensul) sînt determinate de un vector $\vec{u}$ legat de originea O, numit *versorul* axei. Un astfel de vector are modulul egal cu unitatea.

Poziția unui punct M pe o axă Δ este determinată de vectorul

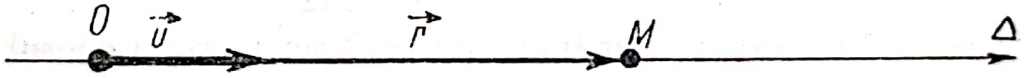


Fig. 1.2. Direcția și sensul unei axe sînt determinate de către versorul său $\vec{u}$.

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, numit vector de poziție. Versorul $\vec{u}$ al axei fiind coliniar cu $\vec{r}$, rezultă:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r} \tag{1.1}$$

dacă vectorul $\vec{r}$ este nenul. Deci $\vec{r} = r\,\vec{u}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.4. **Proiecția unei forțe pe o axă.** Metoda analitică de reducere a forțelor se bazează pe noțiunea de proiecție a forței pe o axă.

Proiecția $\overline{A_1B_1} = F_\Delta$ a unei forțe $\vec{F}$ pe axa Δ este mărimea algebrică

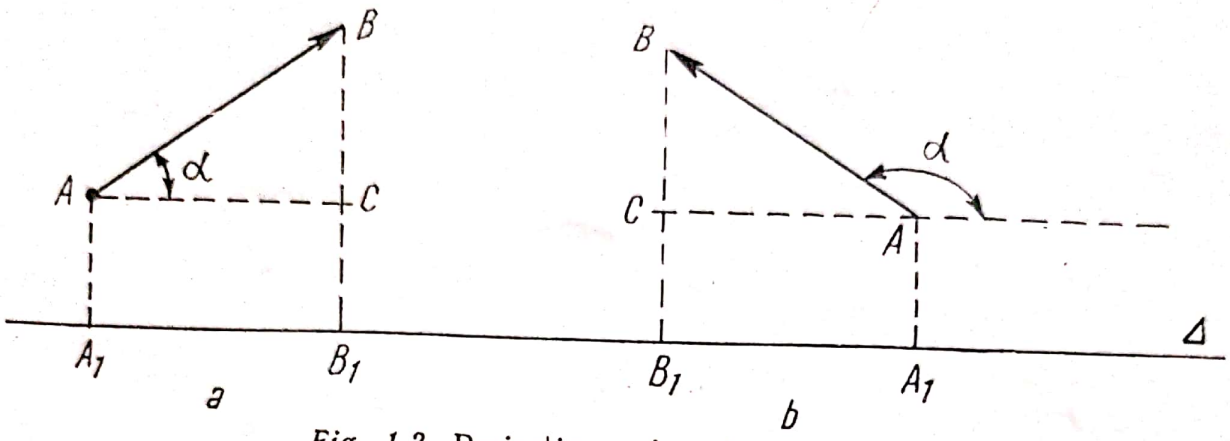


Fig. 1.3. Proiecția unui vector pe o axă.

a vectorului $\overrightarrow{A_1B_1}$, obținut ducînd din extremitățile A și B ale forței două perpendiculare pe axă. Această proiecție $\overline{A_1B_1}$ este o mărime scalară pozitivă, dacă $\overrightarrow{A_1B_1}$ are sensul axei Δ $\left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, sau negativă, dacă $\overrightarrow{A_1B_1}$ are sensul opus axei Δ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi\right)$. Din triunghiul ACB obținem:

$$F_\Delta = F \cos \alpha. \tag{1.2}$$

Proiecția unei forțe pe o axă oarecare este egală cu modulul forței, înmulțit cu cosinusul format de direcția forței cu direcția axei. Formula (1.2) rămîne valabilă oricare ar fi unghiul α. Dacă facem produsul scalar al vectorilor $\vec{F}$ și $\vec{u}$, obținem:

$$\vec{F} \cdot \vec{u} = F \cdot 1 \cdot \cos \alpha = F \cos \alpha.$$

Putem spune că proiecția unei forțe pe o axă oarecare se obține făcînd produsul scalar dintre forță și versorul axei respective.

Fie forțele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ aplicate în A și echipolente cu $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$. Formînd poligonul acestor forțe obținem rezultanta lor $\vec{R}$ (fig. 1.4, *a* și *b*).

Proiectînd conturul poligonului $ABCD$ (fig. 1.4,*b*) pe axa Ox obținem:

$$F_{1x} = \overline{A_1B_1},\ F_{2x} = \overline{B_1C_1},\ F_{3x} = \overline{C_1D_1},\ R_x = \overline{A_1D_1}.$$

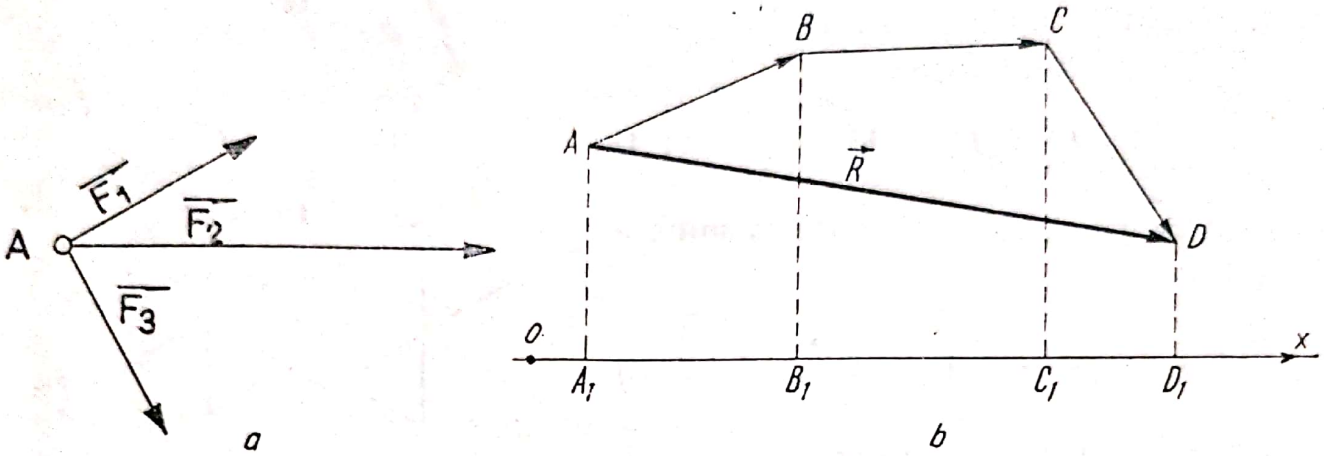


Fig. 1.4. Proiecția rezultantei unui sistem de forțe concurente.

Adunînd membru cu membru egalitățile de mai sus, rezultă:

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = R_x,$$

adică, *proiecția rezultantei unui sistem de forțe concurente pe o axă oarecare este egală cu suma algebrică a proiecțiilor forțelor ce alcătuiesc sistemul pe aceeași axă.*

1.5. **Proiecțiile unei forțe pe două axe de coordonate ortogonale.** Să considerăm un sistem de axe de coordonate carteziene xOy (fig. 1.5)

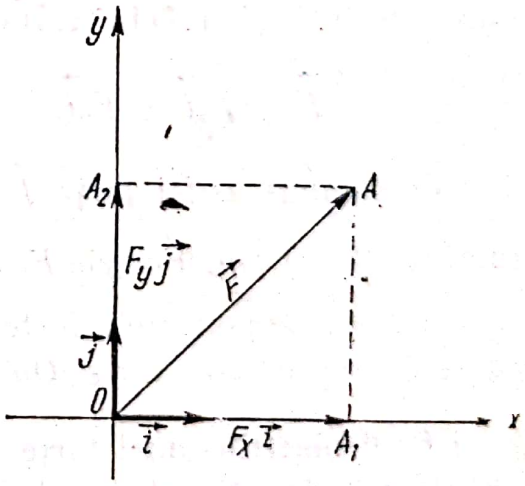


Fig. 1.5. Proiectarea unei forțe pe direcțiile ortogonale Ox și Oy este echivalentă cu descompunerea forței în două componente pe direcțiile respective.

și o forță cu punctul de aplicație în O. Ducem din extremitatea A a forței perpendiculare pe axele de coordonate. Mărimile algebrice ale segmen-

telor $\overline{OA_1}$ și $\overline{OA_2}$ sînt proiecțiile forței pe axele de coordonate. Vom însemna aceste proiecții cu F_x și F_y. În acest caz:

$$F_x = F\cos\alpha,\ F_y = F\sin\alpha. \tag{1.3}$$

Cunoscînd proiecțiile F_x și F_y putem calcula modulul forței:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2. \tag{1.4}$$

Forța $\vec{F}$ poate fi considerată ca sumă a doi vectori

$$\vec{F} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}. \tag{1.5}$$

Vectorul $\overrightarrow{OA_1}$ fiind coliniar cu versorul $\vec{i}$ al axei Ox, poate fi exprimat sub forma:

$$\overrightarrow{OA_1} = F_x\vec{i}. \tag{1.6}$$

În mod analog

$$\overrightarrow{OA_2} = F_y\vec{j}, \tag{1.7}$$

unde $\vec{j}$ este versorul axei Oy. Ținînd seamă de (1.6) și (1.7) în (1.5) obținem:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}. \tag{1.8}$$

Am descompus astfel forța $\vec{F}$ după direcțiile Ox și Oy. Forțele $F_x\vec{i}$ și $F_y\vec{j}$ se numesc componentele forței $\vec{F}$ pe axele de coordonate Ox și Oy.

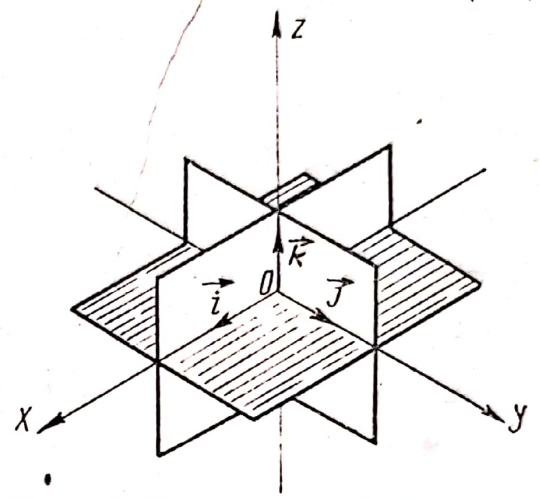


Fig. 1.6. Direcțiile și sensul axelor, Ox, Oy și Oz sînt determinate de către versorii $\vec{i}$, $\vec{j}$ și $\vec{k}$.

1.6. **Proiecțiile unei forțe pe trei axe de coordonate ortogonale.** Să considerăm un sistem rectangular de coordonate $Oxyz$ (fig. 1.6) și o forță

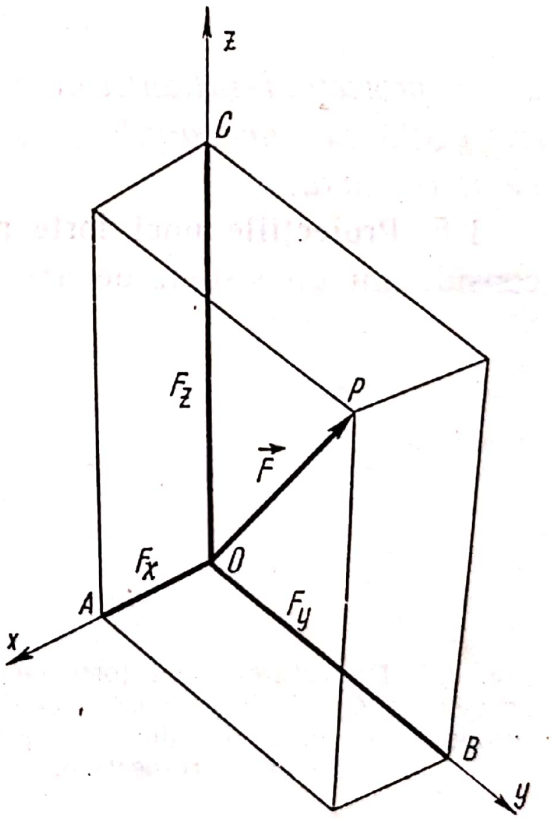


Fig. 1.7. Proiecțiile forței $\vec{F}$ aplicată în O pe axele ortogonale Ox, Oy și Oz.

oarecare $\vec{F}$ cu punctul de aplicație în O (fig. 1.7). Proiectăm forța $\vec{F}$ pe direcțiile Ox, Oy și Oz, ducînd prin punctul P, extremitatea forței $\vec{F}$, cîte un plan perpendicular pe Ox, Oy și Oz, care taie aceste axe în A, B și respectiv în C. Proiecțiile căutate sînt: $\overline{OA} = F_x$, $\overline{OB} = F_y$ și $\overline{OC} = F_z$. Componentele forței pe cele trei direcții sînt: $F_x\vec{i}$, $F_y\vec{j}$ și $F_z\vec{k}$. Construim poligonul forțelor $F_x\vec{i}$, $F_y\vec{j}$ și $F_z\vec{k}$ (fig. 1.8) și rezultanta forțelor este $\vec{F}$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}. \tag{1.9}$$

Modulul forței $\vec{F}$ este egal cu lungimea diagonalei paralelipipedului care are drept laturi proiecțiile forței $\vec{F}$ pe cele trei axe de coordonate.

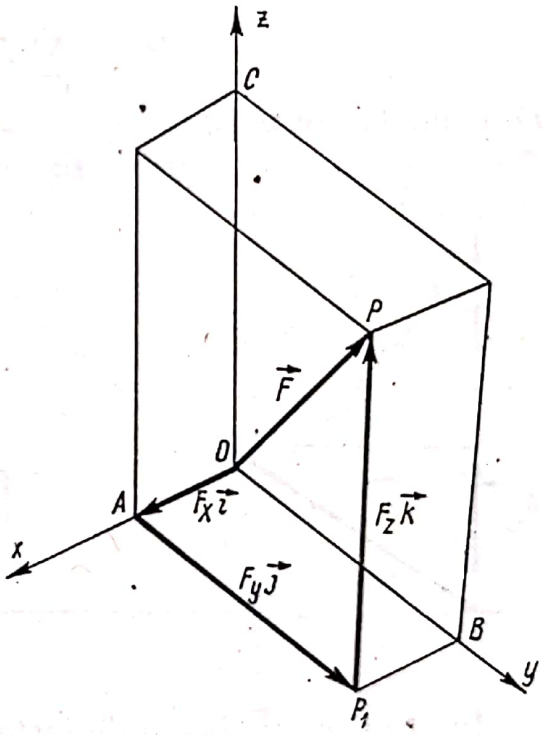


Fig. 1.8. Compunerea forțelor $F_x\vec{i}$, $F_y\vec{j}$ și $F_z\vec{k}$ prin metoda poligonului forțelor.

Din geometria în spațiu se știe că lungimea F a diagonalei paralelipipedului este dată de:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2. \tag{1.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

1.7. **Metoda analitică de compunere a forțelor concurente.** Fie un sistem de forțe concurente coplanare $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$..., $\vec{F}_n$. Descompunem cele n forțe pe direcțiile ortogonale Ox și Oy din planul lor

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j},\ \vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j},\ldots,\ \vec{F}_n = F_{nx}\vec{i} + F_{ny}\vec{j}. \quad (1.11)$$

Adunînd membru cu membru egalitățile (1.11) obținem:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = (F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx})\,\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny})\,\vec{j}. \quad (1.12)$$

Suma vectorială din primul membru al egalității (1.12) reprezintă tocmai rezultanta $\vec{R}$ a sistemului, iar parantezele din membru al doilea al egalității (1.12) reprezintă tocmai proiecțiile rezultantei $\vec{R}$ pe cele două direcții Ox și Oy, deci:

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}, \quad (1.13)$$

unde:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx},\quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}. \quad (1.14)$$

Din fig. 1.9 se obține:

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \text{ și } \operatorname{tg}\alpha = \frac{R_y}{R_x}. \quad (1.15)$$

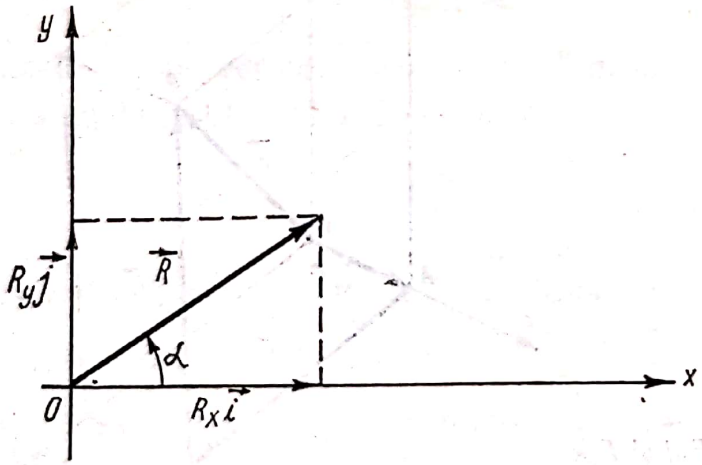


Fig. 1.9. Descompunerea forței $\vec{R}$ pe direcțiile ortogonale Ox și Oy.

În cazul unui sistem de forțe concurente în spațiu obținem:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx},\quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky},\quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \quad (1.16)$$

și

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2. \quad (1.17)$$

Scanned with OKEN Scanner

1.8. **Echilibrul forțelor aplicate unui punct material.** Prin echilibrul punctului material înțelegem starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă a acestuia. Repausul relativ și mișcarea unui punct material cu o viteză constantă pot fi considerate ca un caz particular al mișcării variate, cînd accelerația este nulă. Conform legii fundamentale a dinamicii $\vec{a} = 0$ și $\vec{v} = \overrightarrow{\text{const}}$, dacă

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F} = 0. \tag{1.18}$$

Pentru echilibrul punctului material este necesar și suficient ca rezultanta tuturor forțelor aplicate să fie nulă. Dacă punctul material era inițial în repaus, el va rămîne și mai departe în repaus. Avînd în vedere (1.14) rezultă și următoarele condiții de echilibru (cazul plan):

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \tag{1.19}$$

Dacă rezultanta se determină grafic, atunci poligonul forțelor trebuie să fie închis.

1.9. Aplicații

a) Un punct material P de greutate $\vec{G}$ este legat la mijlocul unui fir ale cărui capete sînt trecute peste două role mici A și B. De capetele

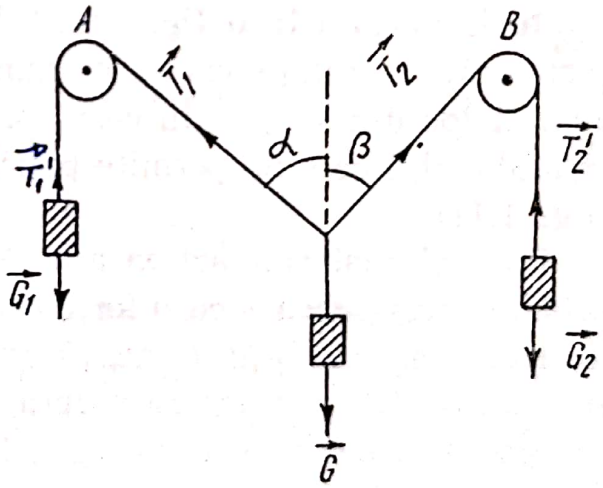


Fig. 1.10. Echilibrul unui punct material liber.

firelor sînt legate două corpuri cu greutățile $\vec{G}_1$ și $\vec{G}_2$. Să se determine unghiurile α și β pentru poziția de echilibru a punctului material (fig. 1.10).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Punctul material P este liber. Un astfel de punct material poate ocupa orice poziție în spațiu, poziția sa fiind determinată de forțele care acționează asupra lui, nu și de alte condiții geometrice. Deoarece punctul material este în echilibru:

$$\vec{G} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0, \quad (T_1' = G_1, \ T_2' = G_2, \ T_1 = T_1', \ T_2 = T_2').$$

Proiectînd pe orizontală și pe verticală ecuația de mai sus obținem:

$$-G_1 \sin \alpha + G_2 \sin \beta = 0, \ G - G_1 \cos \alpha - G_2 \cos \beta = 0.$$

Din ecuațiile de mai sus rezultă:

$$\cos \alpha = \frac{G^2 + G_1^2 - G_2^2}{2GG_1}, \ \cos \beta = \frac{G^2 + G_2^2 - G_1^2}{2GG_2}.$$

b) Pe un plan orizontal se află un punct material P, cu greutatea $\vec{G}$, asupra căruia acționează o forță $\vec{F}$, formînd cu orizontala un unghi α. Să se determine modulul maxim al forței $\vec{F}$, pentru ca punctul material să rămînă încă în echilibru. Coeficientul de frecare dintre punctul material și plan este μ.

Rezolvare. Această problemă se referă la statica punctului material supus la legături. Un astfel de punct material este obligat să îndeplinească anumite condiții, care îngrădesc mobilitatea lui și care se numesc legături. Legăturile obligă punctul material să rămînă tot timpul pe o anumită suprafață sau pe o anumită curbă, sau să nu părăsească un anumit loc din spațiu. În cazul problemei legătura o constituie suprafața planului care nu permite punctului material deplasări pe verticală (fig. 1.11).

Punctul material acționează asupra legăturii cu o anumită forță, legătura reacționează cu o forță egală și de sens opus. Se numește forță de legătură, sau *forță de reacțiune* sau simplu reacțiune, forța cu care o legătură dată acționează asupra punctului material, limitînd într-un fel sau altul deplasările acestuia. Forța de legătură poate înlocui legătura geometrică. Sub acțiunea forțelor efectiv aplicate și a forțelor de legătură punctul material se poate considera liber și condiția de echilibru devine:

$$\vec{R} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forța $\vec{N}$ de legătură este reacțiunea oblică a suprafeței; $\vec{R}$ este rezultanta forțelor efectiv aplicate.

În cazul problemei propuse ecuația vectorială de echilibru are următoare formă:

$$\vec{G} + \vec{F}_f + \vec{F} + \vec{N} = 0.$$

unde $\vec{G}$ este greutatea punctului material, $\vec{F}_f$ forța de frecare, $\vec{F}$ forța

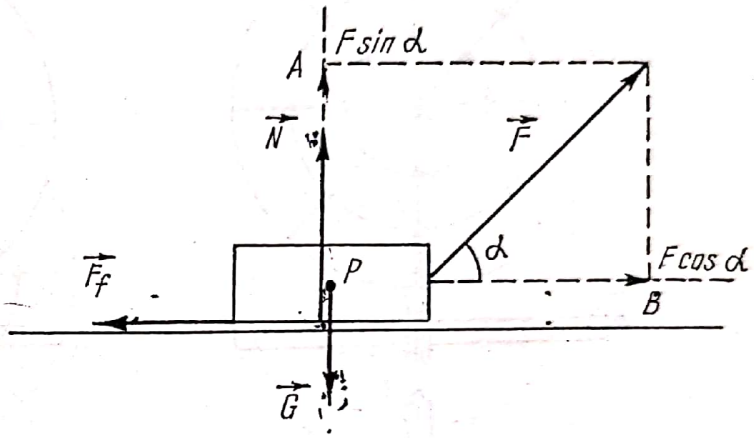


Fig. 1.11. Echilibrul unui punct material supus la legături.

de tracțiune, $\vec{N}$ reacțiunea normală a planului.

Proiectăm ecuația vectorială de mai sus pe direcția orizontală și verticală și obținem:

$$F \cos \alpha - \mu N = 0, \quad N + F \sin \alpha - G = 0,$$

unde μN este modulul forței de frecare la limita lunecării.

Din ecuațiile de mai sus obținem:

$$F_{max} = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Pentru forțe mai mici decît F_{max} corpul va fi în echilibru.

1.10. **Momentul unei forțe în raport cu un punct.** Experiența arată că sub acțiunea unei forțe, un solid poate efectua o mișcare de translație sau o mișcare de rotație în jurul unei axe.

Efectul de rotație poate fi demonstrat cu ajutorul unui disc mobil în jurul unei axe fixe care trece prin centrul discului (fig. 1.12). Pe disc sînt trasate: cercuri ale căror raze cresc cu valori egale și diametre care fac între ele unghiuri de 45°. Discul este montat pe o tijă verticală pe

care se mai află montată o riglă R gradată. Dacă asupra discului acționează forța verticală $\vec{F}$ cu punctul de aplicație în A, aceasta nu produce nici un efect de rotație. Suportul acestei forțe trece prin punctul O de intersecție a axei fixe de rotație cu suprafața discului. Repetăm experiența aplicînd forța în A_1 (fig. 1.13). Lungimea perpendicularei dusă

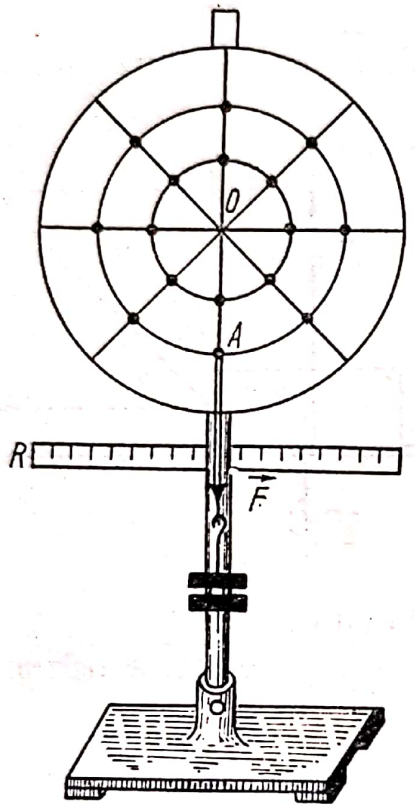


Fig. 1.12. Acțiunea unei forțe asupra unui disc mobil în jurul unei axe fixe. Suportul forței intersectează axa de rotație și efectul de rotație este nul.

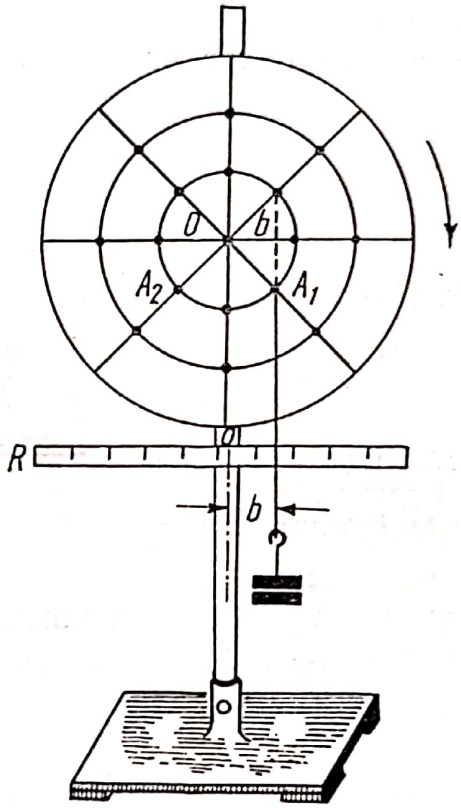


Fig. 1.13. Suportul forței nu intersectează axa de rotație și forța produce efect de rotație.

din punctul O pe suportul forței o notăm cu b și ea se numește *brațul forței* în raport cu punctul O. Brațul forței se măsoară pe rigla R. Lăsînd discul liber el se rotește în sensul acelor ceasornicului, pînă cînd suportul forței coincide cu verticala punctului O. Dacă forța se aplică în A_2 simetricul lui A_1 față de verticala lui O, discul se rotește în sens invers acelor ceasornicului. Din aceste experiențe rezultă că o forță produce efect de rotație asupra unui corp cînd suportul său nu trece prin axa fixă de rotație. Efectele de rotație pot fi de sensuri contrarii în funcție

Scanned with OKEN Scanner

de poziția și orientarea forței față de axa de rotație. Aplicînd simultan în punctele A_1 și A_2 forțe egale, discul rămîne în echilibru. Deci cele două forțe au efecte de rotație egale și de sensuri contrarii. Aplicînd în punctul A_1 forța $\vec{F}_1$ cu brațul b și în A_2 forța $\vec{F}_2 = 2\vec{F}_1$ cu brațul tot b, discul se dezechilibrează. Pentru a stabili echilibrul se constată experimental că trebuie să se mute punctul de aplicație al forței $\vec{F}_1$ în A_3 (fig. 1.14). Brațul forței $\vec{F}_1$ este în acest caz 2 b. S-a demonstrat expe-

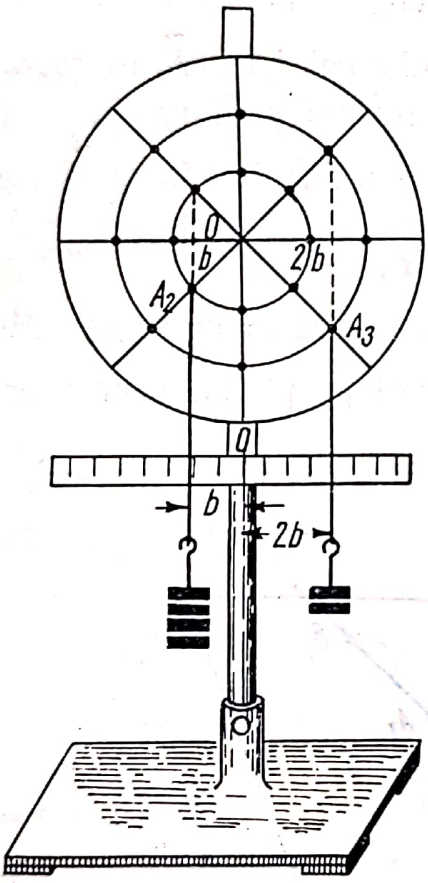


Fig. 1.14. Forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, care acționează asupra discului mobil în jurul axei fixe O, produc efecte de rotație egale și de sens opus.

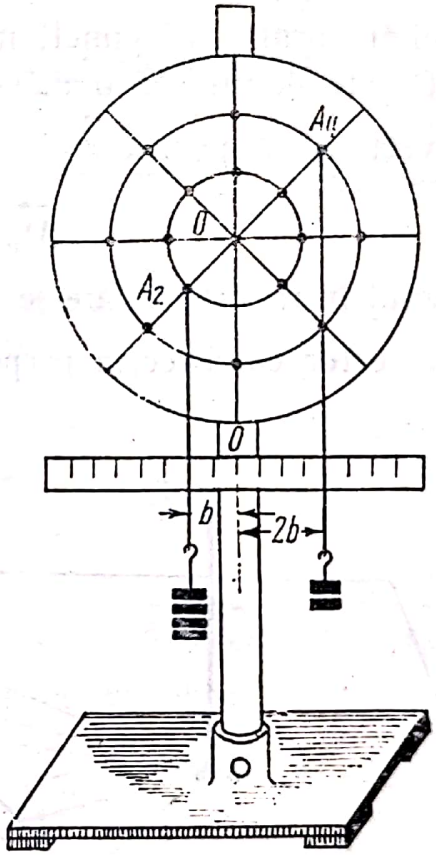


Fig. 1.15. Efectul de rotație produs asupra discului mobil nu se schimbă dacă forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ se deplasează asupra suporturilor lor.

rimental că rotația corpului depinde atît de mărimea forței cît și de brațul forței. Dacă se deplasează forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ de-a lungul suporturilor lor efectul de rotație nu se schimbă (fig. 1.15).

Scanned with OKEN Scanner

Mărimea care măsoară cantitativ efectul de rotație al forței se numește *momentul forței*. *Momentul unei forțe* $\vec{F}$ *în raport cu un punct O, este mărimea egală numeric cu produsul dintre modulul forței și brațul acesteia în raport cu punctul O*. Simbolul momentului forței $\vec{F}$ în raport cu punctul O este M_0. Deci

$$M_0 = F \cdot b. \tag{1.20}$$

Valoarea numerică $F.b$ nu ne spune nimic despre axa de rotație și sensul de rotație în jurul axei. Pentru a caracteriza deplin efectul de rotație al forței în jurul unui punct, momentul unei forțe $\vec{F}$ în raport cu un punct O este definit ca o mărime vectorială prin produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\vec{r}$ al originii A a forței și forța $\vec{F}$ (fig. 1.16):

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{1.21}$$

Punctul în raport cu care se ia momentul se numește *pol*. Momentul este un vector cu direcția perpendiculară pe planul vectorilor $\vec{r}$ și $\vec{F}$

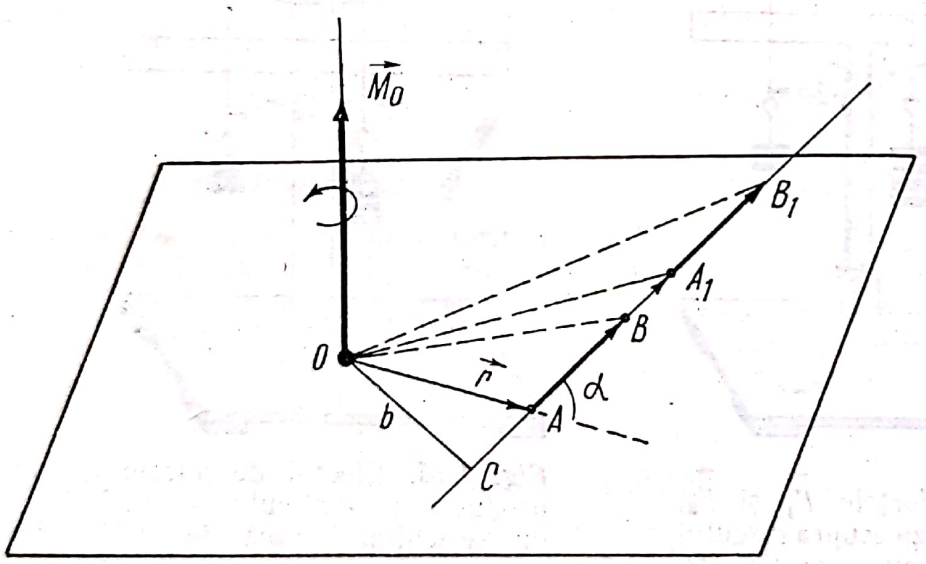


Fig. 1.16. Momentul forței în raport cu un punct.

și cu sensul determinat de regula burghiului (fig. 1.17). Direcția vectorului moment $\vec{M}_0$ ne dă direcția axei, trecînd prin O, în jurul căreia s-ar roti corpul sub acțiunea forței $\vec{F}$, dacă ar fi lăsat liber să se rotească în jurul punctului O. Sensul lui $\vec{M}_0$ ne dă sensul rotației corpului.

Scanned with OKEN Scanner

Modulul vectorului $\vec{M}_0$ este:

$$M_0 = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot b, \quad b = r \sin \alpha, \tag{1.22}$$

și este egal cu aria paralelogramului care are laturile r și F sau cu dublul ariei triunghiului OAB, adică

$$M_0 = 2 \text{ aria } \triangle OAB. \tag{1.23}$$

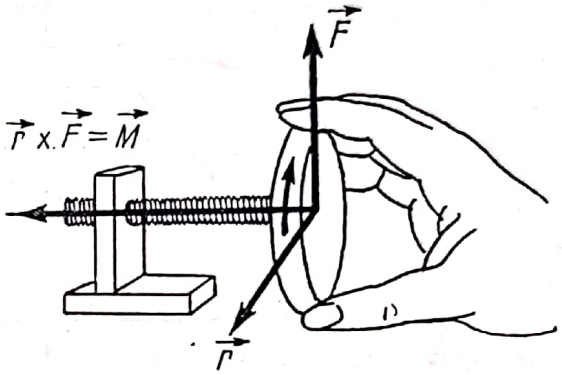


Fig. 1.17. Regula burghiului pentru determinarea sensului momentului. Se așază burghiul paralel cu direcția momentului și se rotește în sensul forței $\vec{F}$. Sensul de înaintare a burghiului coincide cu sensul momentului forței.

Dacă se deplasează punctul de aplicație al forței din A în A_1 (cazul vectorului alunecător), modulul momentului nu se schimbă, căci atît mărimea forței cît și brațul b al forței rămîn aceleași.

1.11. **Teorema lui Varignon.** Să considerăm un punct material asupra căruia acționează simultan forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. Momentele forțelor în raport cu un pol O sînt:

$$\vec{M}_0(\vec{F}_1) = \vec{r} \times \vec{F}_1, \ \vec{M}_0(\vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}_2, \ \ldots, \ \vec{M}_0(\vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F}_n.$$

Adunăm egalitățile de mai sus membru cu membru:

$$\vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) + \ldots + \vec{M}_0(\vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \ldots +$$
$$+ \vec{r} \times \vec{F}_n = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{R}.$$

Am notat cu $\vec{R}$ rezultanta celor n forțe. Momentul rezultantei în raport cu polul O este $\vec{M}_0(\vec{R}) = \vec{r} \times \vec{R}$, deci

$$\vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) + \ldots + \vec{M}_0(\vec{F}_n) = \vec{M}_0(\vec{R}). \tag{1.24}$$

Această egalitate exprimă teorema lui Varignon: *suma vectorială a momentelor forțelor concurente în raport cu un pol O este egală cu momentul rezultantei acestor forțe în raport cu același pol.*

Scanned with OKEN Scanner

1.12. **Momentul unei forțe în raport cu o axă.** Să considerăm o forță $\vec{F}$ care acționează asupra unui solid imprimîndu-i un efect de rotație în jurul unei axe fixe date z. Pentru calculul momentului forței în raport

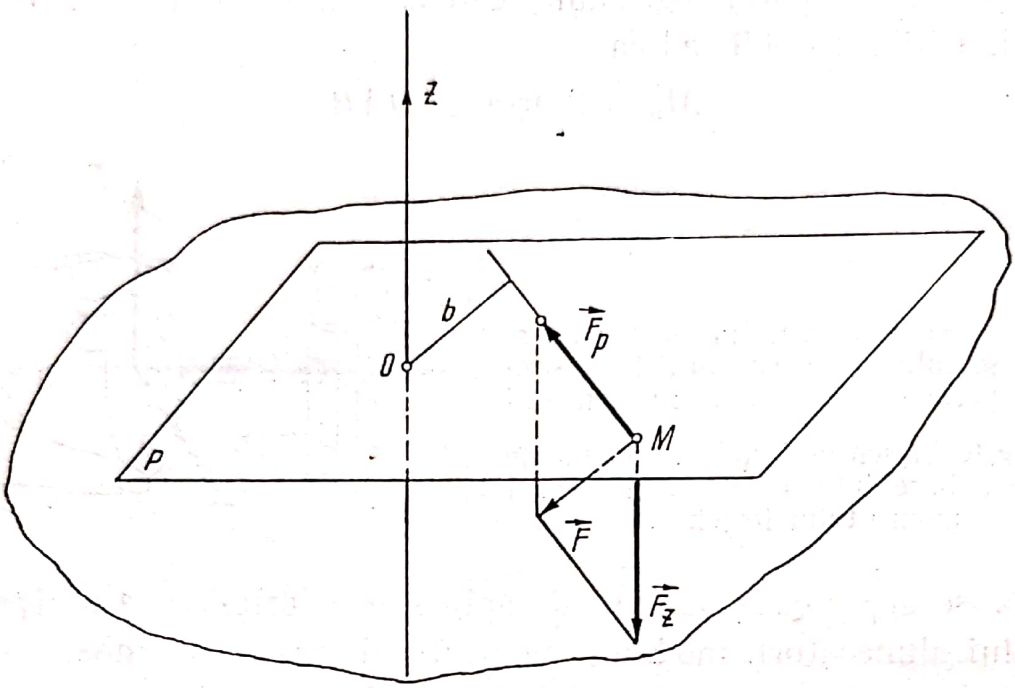


Fig. 1.18. Momentul forței în raport cu o axă.

cu axa z, considerăm un plan P perpendicular pe această axă, care să conțină punctul M de aplicație al forței (fig. 1.18).

Descompunem forța în două componente, una $\vec{F}_z$ paralelă cu axa z și una $\vec{F}_p$ cuprinsă în planul P. Momentul componentei $\vec{F}_z$ în raport cu punctul O este perpendicular pe axă (situat în planul P), deci acesta nu poate produce efect de rotație asupra solidului în jurul axei z. Componenta $\vec{F}_z$ are tendința de a deplasa corpul pe direcția axei z. Componenta $\vec{F}_p$ este aceea care produce efectul de rotație asupra solidului în jurul axei fixe date z. Efectul de rotație produs de forța $\vec{F}$ se reduce la efectul de rotație al componentei $\vec{F}_p$

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_p) = \pm\, b.F_p,$$

unde s-a notat cu $M_z(\vec{F})$ momentul forței $\vec{F}$ în raport cu axa z și $M_z(\vec{F}_p)$ momentul componentei $\vec{F}_p$ în raport cu axa z. Însă, forța $\vec{F}_p$ se află într-un plan perpendicular pe axa z, deci efectul de rotație în raport cu

Scanned with OKEN Scanner

axa este același cu efectul de rotație în raport cu polul O, în care axa intersectează planul P. Deci

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_p), \tag{1.25}$$

unde $M_0(\vec{F}_p)$ reprezintă valoarea algebrică a momentului forței $\vec{F}_p$ în raport cu punctul O.

Momentul unei forțe în raport cu o axă este o mărime scalară egală cu valoarea algebrică a momentului componentei forței într-un plan perpendicular pe axă, în raport cu punctul de intersecție al axei cu planul.

Semnul momentului în raport cu o axă se stabilește după regula cunoscută: dacă $\vec{F}_p$ are tendința să rotească corpul în sensul ales pozitiv pe axă, momentul se ia cu semnul plus, dacă forța are tendința să rotească corpul în sensul invers, momentului i se dă semnul minus.

1.13. **Relația dintre momentul unei forțe în raport cu o axă și momentul forței în raport cu un punct.** Fie forța $\vec{F}$ care acționează asupra unui corp, aplicată într-un punct A (fig. 1.19).

Luăm pe axa z un punct arbitrar O, față de care calculăm momentul forței $\vec{F}$, care este reprezentat prin vectorul $\vec{M}_0(\vec{F})$ perpendicular pe planul OAB. Modulul momentului $\vec{M}_0(\vec{F})$ este:

$$M_0(\vec{F}) = b \cdot F = 2 \text{ aria } \triangle\ OAB. \tag{1.26}$$

Momentul forței $\vec{F}$ în raport cu axa z este:

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_p) = 2 \text{ aria } \triangle\ OA_1B_1. \tag{1.27}$$

Dar triunghiul OA_1B_1 este proiecția triunghiului OAB pe planul P. Unghiul dintre planele triunghiurilor este egal cu unghiul dintre perpendicularele pe plane. Din geometrie se știe că aria $\triangle\ OA_1B_1 =$ $=$ aria $\triangle\ OAB \cos \alpha$. Înmulțind egalitatea de mai sus cu 2 și comparînd rezultatul cu relațiile (1.26) și (1.27) obținem:

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \alpha. \tag{1.28}$$

Deci: *momentul unei forțe în raport cu o axă este egal cu proiecția pe axă a momentului forței $\vec{F}$, față de un punct de pe axă.*

1.14. **Cuplu de forțe.** Cuplul de forțe este un sistem de două forțe paralele, de sensuri contrare, de același modul și de suporturi diferite,

Scanned with OKEN Scanner

aplicate aceluiași solid. Planul definit de cele două forțe se numește planul cuplului, iar distanța dintre suporturile lor se numește brațul cuplului (fig. 1.20).

Cu toate că rezultanta cuplului $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F'} = 0$, totuși cuplul are

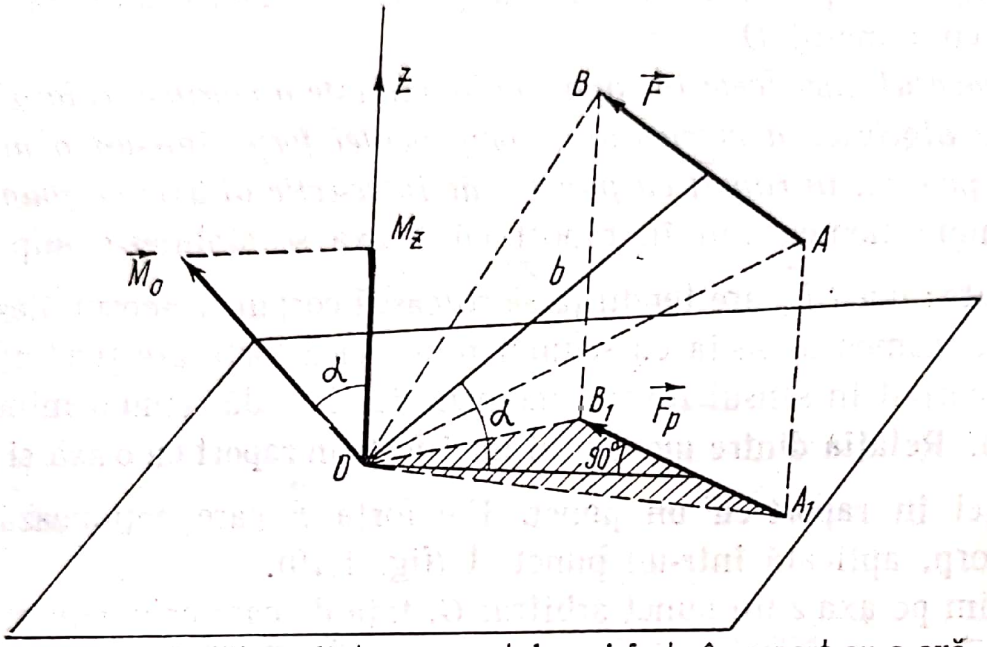


Fig. 1.19. Legătura dintre momentul unei forțe în raport cu o axă și momentul forței în raport cu un punct.

o acțiune bine determinată asupra corpului căruia i se aplică, rotindu-l în jurul unei axe perpendiculare pe planul cuplului.

1.15. **Momentul unui cuplu.** Momentul unui cuplu de forțe față de orice punct din spațiu este același, fiind o proprietate intrinsecă a cuplului (fig. 1.21).

Să considerăm un punct oarecare O din spațiu. Momentul cuplului în raport cu acest punct este:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}.$$

Dar $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_0$, deci

$$\vec{M} = \vec{r}_0 \times \vec{F}.$$

Momentul cuplului este perpendicular pe planul definit de forțele $\vec{F}$, $-\vec{F}$ și are modulul

$$M = Fr_0 \sin \alpha = Fb,$$

unde $b = r_0 \sin \alpha$ este brațul cuplului.

Scanned with OKEN Scanner

Sensul momentului cuplului coincide cu sensul de înaintare al unui șurub a cărui axă coincide cu suportul momentului pe care îl rotim în sensul în care cuplul tinde să rotească corpul.

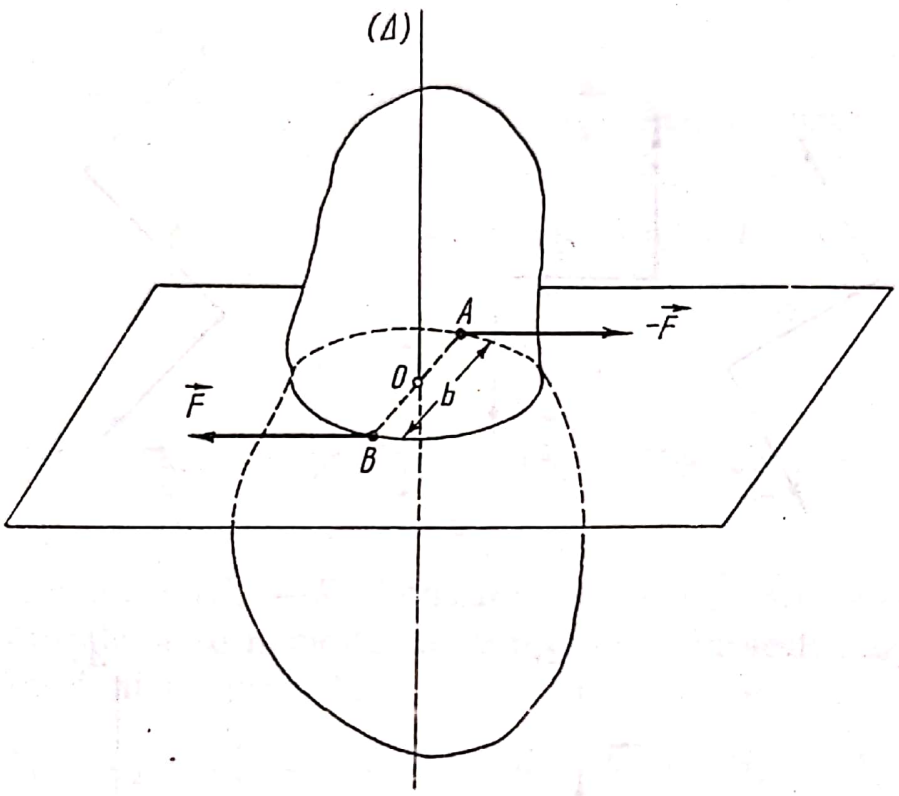


Fig. 1.20. Cuplu de forțe.

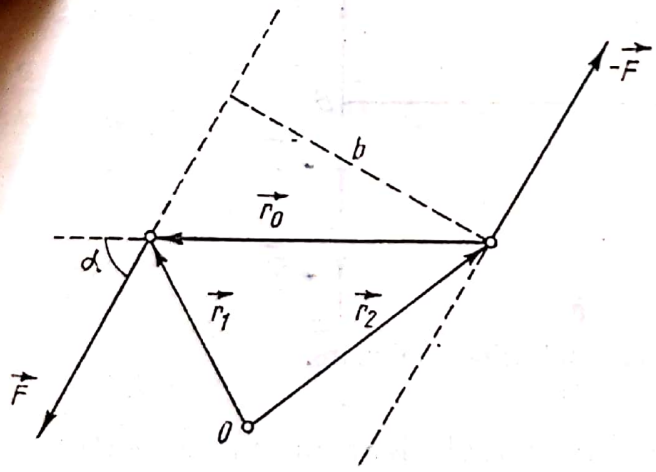


Fig. 1.21. Momentul unui cuplu.

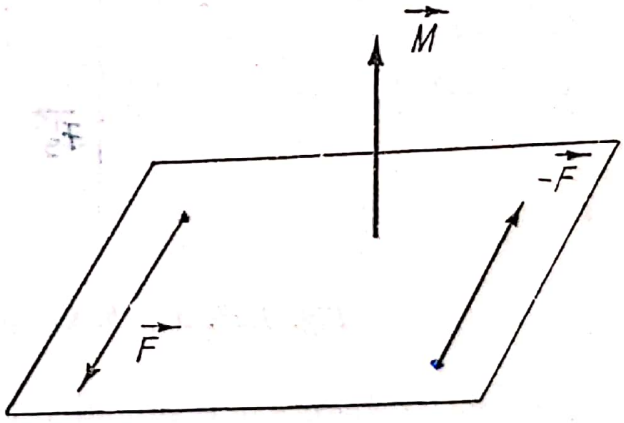


Fig. 1.22. Punctul de aplicație al momentului M al cuplului poate fi orice punct din spațiu.

Punctul de aplicație al momentului cuplului poate fi orice punct din spațiu (vector liber) (fig. 1.22).

Scanned with OKEN Scanner

Două sau mai multe cupluri se spune că sînt echivalente, dacă aplicate succesiv aceluiași corp, produc același efect. Cuplurile echivalente se pot înlocui unul cu altul. Toate cuplurile echivalente au același

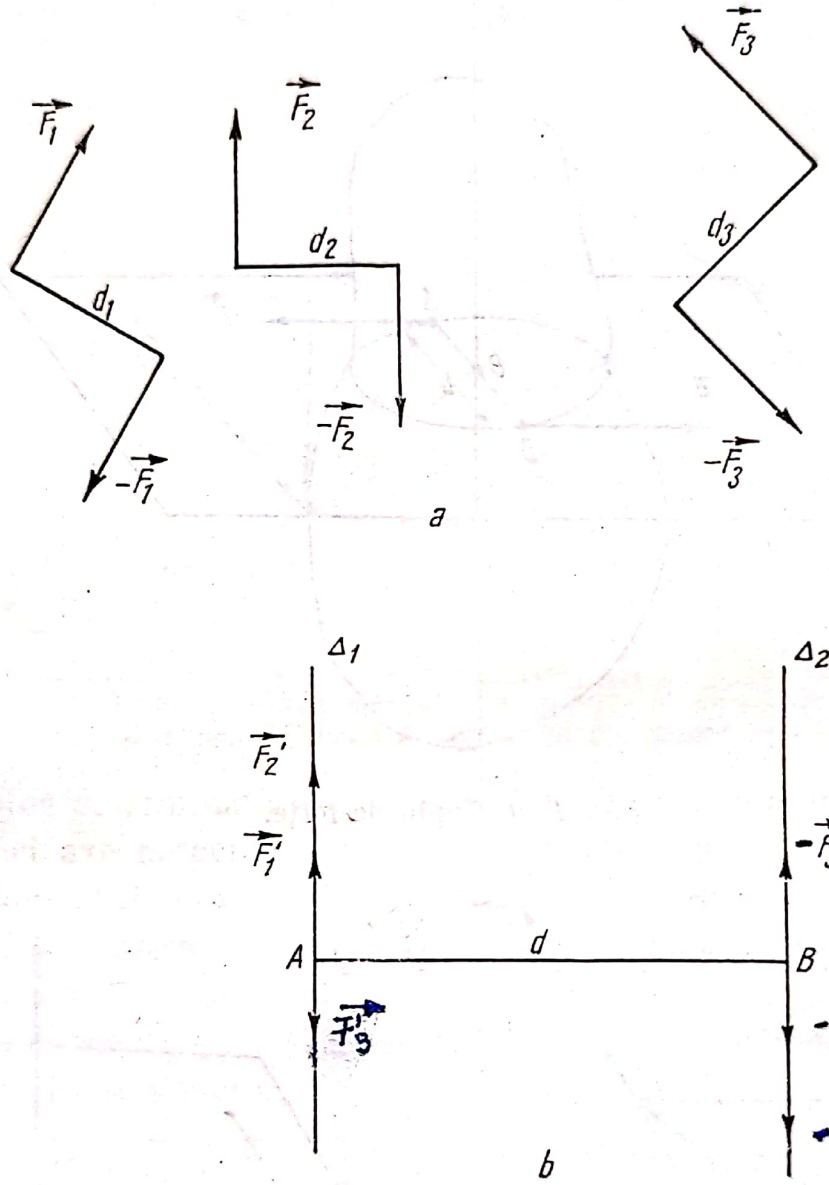


Fig. 1.23. a și *b.* Compunerea cuplurilor coplanare.

moment, deoarece efectul de rotație este caracterizat numai de către momentul cuplului. Un cuplu poate fi rotit, deplasat în propriul său plan sau într-un plan paralel, efectul său rămînînd același, deoarece momentul său nu se modifică.

1.16. **Compunerea cuplurilor situate în același plan.** Să presupunem că asupra unui corp acționează un sistem de cupluri coplanare

Scanned with OKEN Scanner

$(\vec{F}_1, -\vec{F}_1)$, $(\vec{F}_2, -\vec{F}_2)$, $(\vec{F}_3, -\vec{F}_3)$, cu momentele de mărime $M_1 = F_1 d_1$, $M_2 = F_2 d_2$, $M_3 = F_3 d_3$ (fig. 1.23, *a* și *b*).

Conform unei proprietăți a cuplurilor echivalente, enunțată în paragraful precedent, putem să înlocuim cuplurile date, prin alte cupluri echivalente $(\vec{F}'_1, -\vec{F}'_1)$, $(\vec{F}'_2, -\vec{F}'_2)$, $(\vec{F}'_3, -\vec{F}'_3)$. Aceste cupluri au același braț iar forțele lor au aceleași suporturi (Δ_1) și (Δ_2). Bineînțeles mărimile forțelor $\vec{F}'_1$, $\vec{F}'_2$, $\vec{F}'_3$ vor fi diferite de cele ale forțelor $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$.

Compunînd forțele de pe suportul (Δ_1) obținem:

$$\vec{R} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \vec{F}'_3,$$

apoi compunînd forțele de pe suportul (Δ_2) obținem o rezultantă egală cu prima dar de sens opus $(-\vec{R})$.

Cele două forțe $(\vec{R}, -\vec{R})$ formează un cuplu, care poate înlocui cuplurile inițiale și se numește cuplu rezultant. Proiecția momentului cuplului rezultant pe normala la planul forțelor este:

$$M = (F'_1 + F'_2 - F'_3)\ d = F'_1 d + F'_2 d - F'_3 d = M_1 + M_2 - M_3.$$

Rezultă că, un sistem de cupluri coplanare este echivalent cu un singur cuplu situat în același plan cu primele și avînd un moment egal cu suma algebrică a momentelor cuplurilor componente. Cuplul obținut este cuplul rezultant, iar momentul său este momentul rezultant al cuplurilor date:

$$\boxed{\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i .}$$

În cazul cînd $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$ sistemul de cupluri este în echilibru. Dealtfel este singura condiție ca un sistem de cupluri să se afle în echilibru.

Mai general, cînd cuplurile se află în plane diferite, momentele lor se compun vectorial, dînd un cuplu rezultant (echivalent):

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i .$$

Scanned with OKEN Scanner

1.17. **Caracterul forţelor care acţionează asupra solidului rigid.** S-a afirmat că forţele care acţionează asupra solidului rigid au caracterul de vectori alunecători, afirmaţie confirmată de experienţă.

Să considerăm un solid rigid (S) (fig. 1.24, *a* şi *b*) asupra căruia ac-

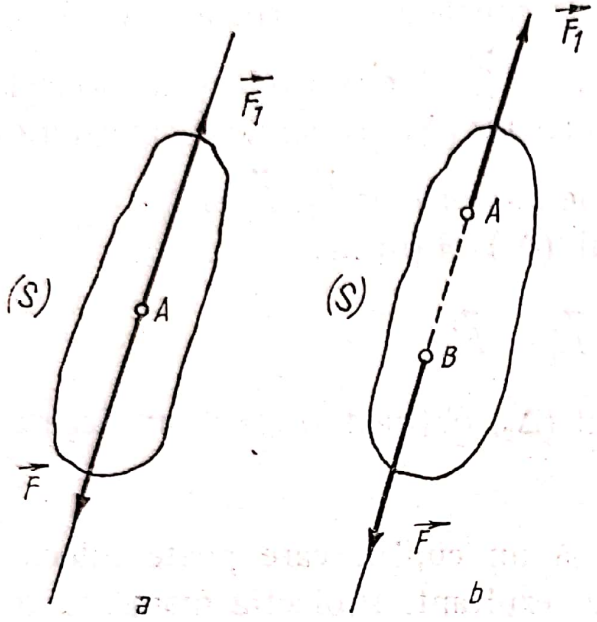


Fig. 1.24. a şi *b* Forţele egale şi direct opuse care acţionează asupra unui solid rigid nu produc nici un efect asupra acestuia.

ţionează forţele $\vec{F}$ şi $\vec{F}_1$, având aceeaşi dreaptă suport, acelaşi modul dar sensuri opuse. Fie că forţele au acelaşi punct de aplicaţie (fig. 1.24, *a*) sau nu (fig. 1.24, *b*), ele se echilibrează. Deci, dacă asupra solidului rigid acţionează pe aceeaşi dreaptă în puncte diferite, forţe egale şi direct opuse, ele nu au nici un efect asupra solidului rigid. De aici, rezultă că, dacă asupra unui solid rigid acţionează un sistem de forţe, se pot suprima din sistem sau se pot introduce în sistem două forţe egale şi direct opuse fără ca efectul sistemului de forţe să se schimbe.

Să presupunem că asupra solidului rigid (S) acţionează numai forţa $\vec{F}$ (fig. 1.25, *a*) cu punctul de aplicaţie în A. Pe suportul forţei $\vec{F}$, în punctul B să considerăm aplicate două forţe egale şi direct opuse ($\vec{F'}$, $-\vec{F'}$) cu $\vec{F'} = \vec{F}$. Aceasta nu a schimbat cu nimic efectul forţei $\vec{F}$ asupra solidului (fig. 1.25, *b*). Suprimînd forţa $\vec{F}$ aplicată în A şi forţa $-\vec{F'}$, aplicată în B, nu se schimbă efectul forţelor asupra solidului (fig. 1.25, *c*).

În urma acestei operaţii forţa $\vec{F}$ şi-a schimbat punctul de aplicaţie din A în B (ca forţă $\vec{F'}$), fără ca efectul ei asupra solidului să varieze.

De aici reiese caracterul de vector alunecător al forței aplicate solidului rigid.

Forța aplicată solidului (S) în A poate fi deplasată paralel cu ea însăși, dar atunci apare un cuplu de forțe. Într-adevăr introducem în B

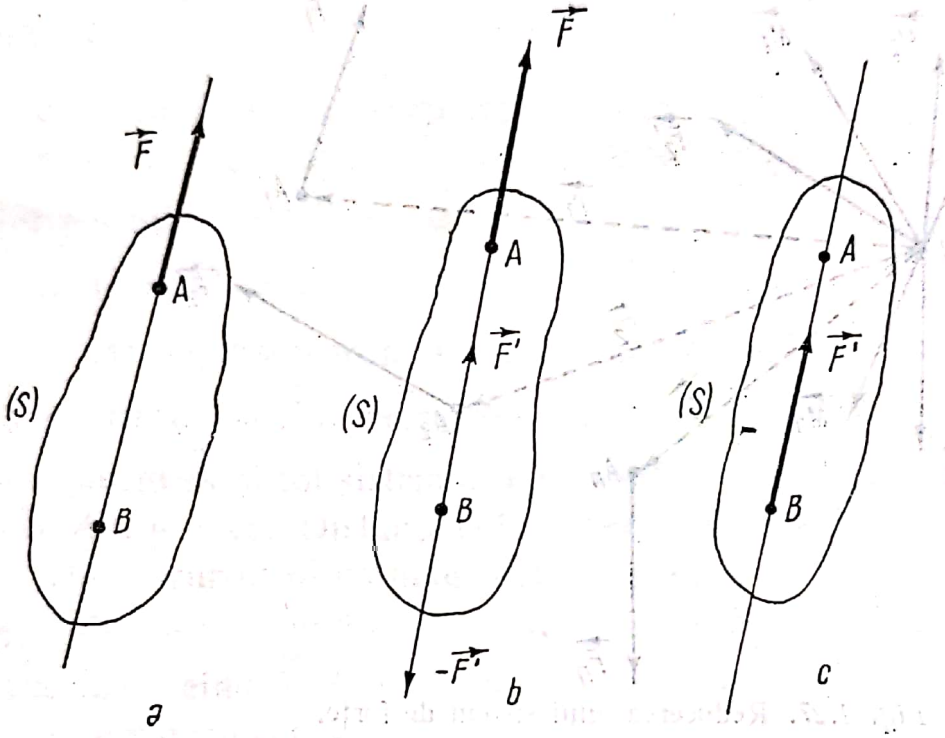


Fig. 1.25. Forța care acționează asupra unui solid rigid are caracterul unui vector alunecător.

un sistem de două forțe opuse $(\vec{F}', -\vec{F}')$ cu $\vec{F}' = \vec{F}$. Atunci forța $\vec{F}$ aplicată în A, apare deplasată în B ca forță $\vec{F}'$, dar apare și un cuplu de forțe caracterizat prin momentul său (fig. 1.26).

$$\vec{M} = \vec{r}_0 \times \vec{F} = -\vec{r}_0 \times (-\vec{F}).$$

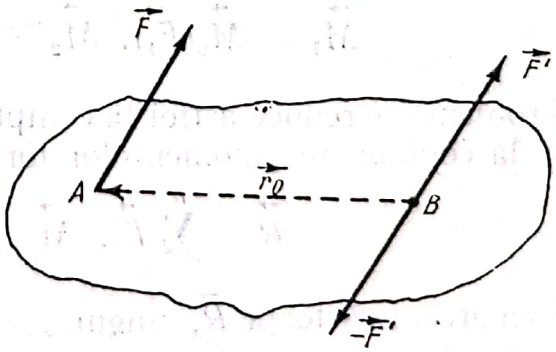


Fig. 1.26. Deplasarea unei forțe paralel cu ea însăși.

Forța $\vec{F}$ aplicată în A, are față de punctul B același moment ca și cuplul $(\vec{F}, -\vec{F})$, genera in deplasarea forței $\vec{F}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.18. **Reducerea unui sistem de forțe.** Fie un sistem oarecare de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, care acționează asupra aceluiași corp. Alegem un punct arbitrar, numit punct de reducere sau *pol*. Deplasăm toate forțele în

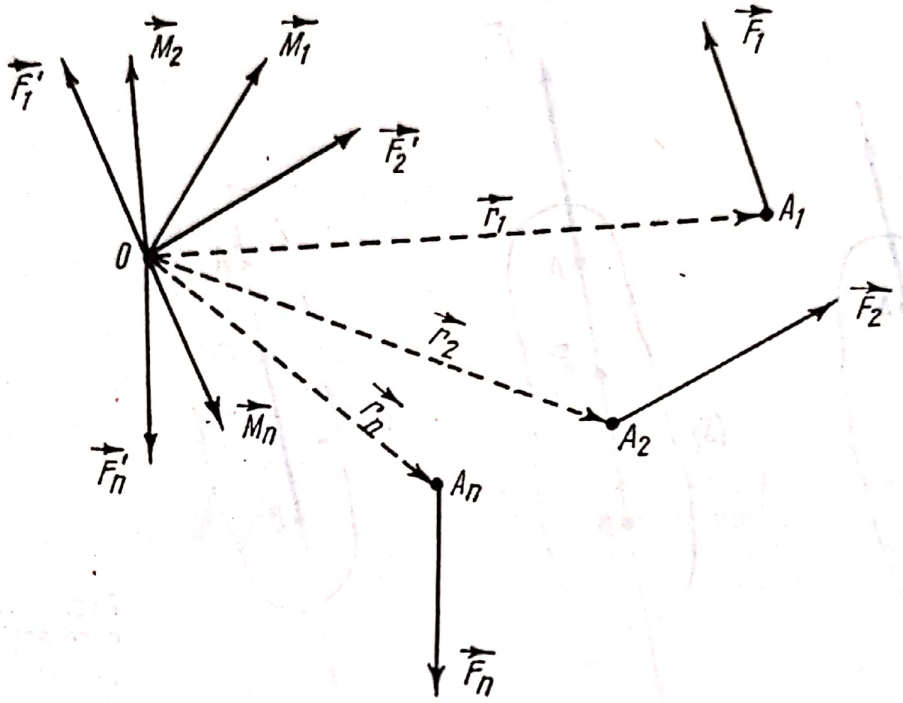


Fig. 1.27. Reducerea unui sistem de forțe.

acest punct; atunci vor apărea și cuplurile respective (fig. 1.27). În această situație, asupra corpului va acționa sistemul de forțe:

$$\vec{F}_1' = \vec{F}_1, \vec{F}_2' = \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n,$$

aplicate în punctul O și un sistem de cupluri cu momentele

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_0(\vec{F}_1), \ \vec{M}_2 = \vec{M}_0(\vec{F}_2), \ \ldots, \ \vec{M}_n = \vec{M}_0(\vec{F}_n).$$

Problema se reduce astfel la compunerea forțelor concurente în punctul O și la compunerea momentelor lor:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k', \ \vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k.$$

Remarcăm că forța $\vec{R}$, singură, nu poate înlocui în general sistemul de forțe. Mărimea rezultantei este independentă de alegerea polului. Însă momentul rezultant $\vec{M}$ se schimbă, deoarece deplasînd rezultanta într-un nou pol O' va apărea un cuplu suplimentar.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatul reducerii unui sistem de forțe depinde de $\vec{R}$ și $\vec{M}$:

a) Dacă $\vec{R} = 0$ și $\vec{M} = 0$, sistemul de forțe se află în echilibru;

b) Dacă $\vec{R} = 0$ și $\vec{M} \neq 0$, sistemul de forțe se reduce la un cuplu de moment $\vec{M}$. În acest caz momentul $\vec{M}$ nu depinde de alegerea punctului O.

c) Dacă $\vec{R} \neq 0$ și toate forțele sînt conținute într-un plan, atunci sistemul de forțe se poate reduce numai la o rezultantă. Două cazuri sînt posibile :1) $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M} = 0$, sistemul se reduce la o singură forță, adică la rezultanta $\vec{R}$, care este aplicată în O, 2) $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M} \neq 0$, în acest caz deplasăm forța $\vec{R}$ paralel cu ea însăși într-un punct A, astfel ca momentul lui $\vec{R}$ în raport cu A să fie $-\vec{M}$. Acesta echilibrează cuplul de moment $\vec{M}$ și tot sistemul se înlocuiește cu o forță $\vec{R'} = \vec{R}$, care trece prin A (fig. 1.28). Distanța $OA = d$ este determinată de relația $Rd = M$.

Din cazurile examinate mai sus rezultă că un sistem de forțe coplanare care nu se echilibrează, se poate reduce fie la o singură forță rezultantă cînd $\vec{R} \neq 0$, fie la un singur cuplu cînd $\vec{R} = O$.

1.19.**Echilibrul solidului rigid.** Mișcarea solidului rigid se descom-

BIBLIOTECA PERSONALĂ
Nr.
Carmen Antonovici

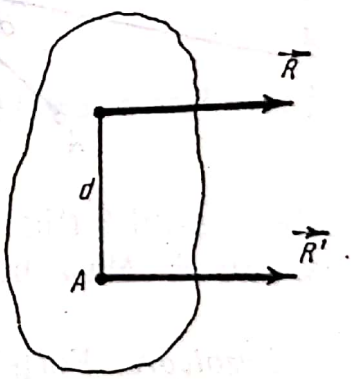


Fig. 1.28. Sistemul se reduce la o rezultantă $\vec{R'}=\vec{R}$ care trece prin A dacă $\vec{R} \neq 0$ și $\vec{M} \neq 0$.

pune în mișcarea de translație a centrului său de masă sub acțiunea forțelor aplicate și într-o mișcare de rotație în jurul unei axe trecînd prin centrul de masă sub acțiunea momentului rezultant. Pentru a nu produce mișcarea de translație a centrului de masă, rezultanta forțelor trebuie să fie nulă. Pentru a nu produce rotația corpului în jurul centru-

Scanned with OKEN Scanner

lui de masă, momentul rezultant al tuturor forțelor aplicate trebuie să fie nul:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0, \quad \vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k = 0.$$

Aceste condiții de echilibru sînt valabile pentru solidul rigid liber, adică pentru solidul care nu are contact cu alte corpuri și care se poate deplasa în orice direcție fără a fi împiedicat de ceva.

Un solid rigid supus la legături, sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare, este în echilibru, dacă sistemul de forțe, compus din forțele exterioare și din forțele care înlocuiesc legăturile, îndeplinește condițiile de echilibru ale solidului rigid liber.

1.20. Probleme rezolvate

1. O bară rigidă AB, cu secțiunea neglijabilă, se poate roti într-un plan vertical în jurul unei axe orizontale care trece prin extremitatea sa A. Ea este menținută în repaus cu ajutorul unui fir inextensibil și cu masa neglijabilă, situat în planul barei. Firul este legat în centrul de greutate al bare și face cu direcția barei un unghi α. Bara face cu orizontala unghiul β (fig. 1.29). Să se determine tensiunea în fir și reacțiunea axei în A. Masa barei M este cunoscută.

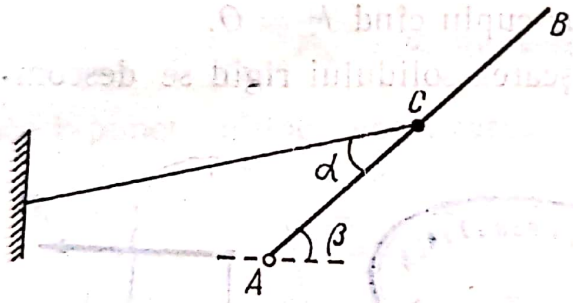


Fig. 1.29.

Rezolvare. Forțele care acționează asupra barei sînt: greutatea $\vec{G}$, tensiunea în fir $\vec{T}$, reacțiunea $\vec{N}$ a axei aplicată în punctul A și cu direcția AB (fig. 1.30).

Condițiile de echilibru sînt:

$$\vec{G} + \vec{T} + \vec{N} = 0, \quad \vec{M}_A(\vec{T}) + \vec{M}_A(\vec{G}) + \vec{M}_A(\vec{N}) = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\vec{M}_A(\vec{T})$, $\vec{M}_A(\vec{G})$ și $\vec{M}_A(\vec{N})$ sînt momentele forțelor $\vec{T}$, $\vec{G}$ și $\vec{N}$ în raport cu punctul A.

Proiectăm ecuațiile vectoriale de mai sus pe două direcții ortogonale G_x și G_y:

$$T \sin \alpha - G \cos \beta + N_x = 0, \quad (a)$$
$$N_y - T \cos \alpha - G \sin \beta = 0, \quad (b)$$
$$T \cdot CA \sin \alpha - G \cdot CA \cos \beta = 0. \quad (c)$$

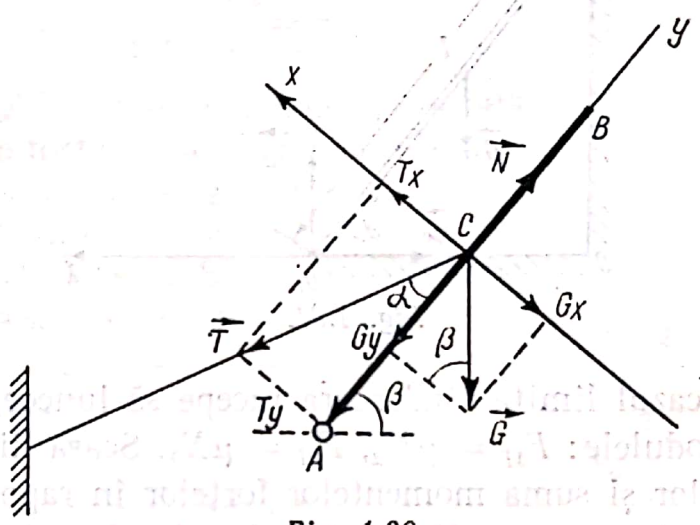


Fig. 1.30.

(Momentul lui $\vec{N}$ în raport cu punctul A este nul.)

Din (c) rezultă: $T \sin \alpha = G \cos \beta$ (d)

Avînd în vedere (d) în (a) rezultă că $N_x = 0$, deci reacțiunea $\vec{N}$ are suport dreapta AB.

Din (c) și (d) obținem:

$$N = N_y = M \cdot g \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}.$$

191 Gheorgh. ▪ 2. O scară este sprijinită de un perete (fig. 1.31). Cunoscînd coeficientul de frecare μ cu podeaua și cu peretele, să se determine unghiul α dintre scară și podea, minim necesar pentru ca scara să nu lunece.

Rezolvare. Această problemă se referă la statica unui solid rigid supus la legături care nu are axă de rotație fixă.

Scanned with OKEN Scanner

Aproximăm scara cu o bară omogenă de lungime l. Forțele care acționează asupra scării sînt: greutatea scării aplicată în centrul său de greutate, reacțiunile $\vec{N}_1$ și $\vec{N}_2$ și forțele de frecare $\vec{F}_{1f}$ și $\vec{F}_{2f}$.

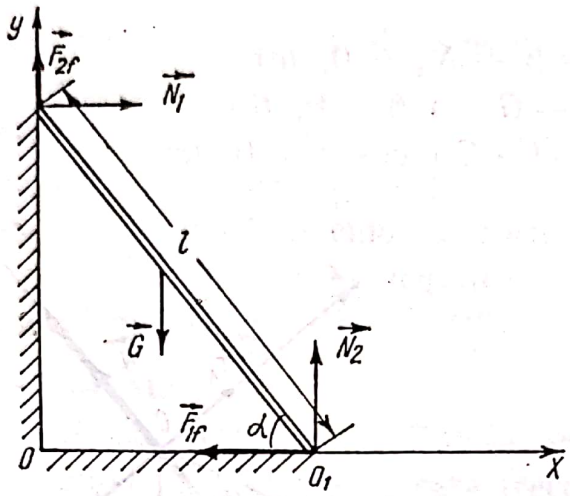


Fig. 1.31.

Considerăm cazul limită cînd scara începe să lunece, atunci forțele de frecare au modulele: $F_{1f} = \mu N_2$, $F_{2f} = \mu N_1$. Scara fiind în echilibru rezultanta forțelor și suma momentelor forțelor în raport cu un punct trebuie să fie egale cu zero. Momentele forțelor le calculăm în raport cu punctul O_1.

Condițiile de echilibru sînt:

$$\vec{F}_{1f} + \vec{N}_1 + \vec{G} + \vec{F}_{2f} + \vec{N}_2 = 0; \sum \vec{M}_{01} = 0.$$

Proiecțiile ecuațiilor vectoriale de mai sus pe axele de coordonate sînt următoarele:

$$N_1 - \mu N_2 = 0, \quad N_1\mu + \mu N_2 - G = 0,$$

$$\mu N_1 l \cos \alpha + N_1 l \sin \alpha - G(l/2) \cos \alpha = 0$$

Rezolvînd sistemul de mai sus obținem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\mu^2}{2\mu}.$$

Unghiul α este independent de masa și lungimea scării.

Probleme

1. Doi cilindri cu raza R sînt suspendați de două cabluri, care fac între ele unghiul 2α (fig. 1.32). Pe cei doi cilindri se așază un al treilea cilindru cu raza R și cu masa 2 m. Sistemul format din cei trei cilindri se află în echilibru. Să se afle distanța l dintre centrele primilor doi cilindri, dacă fiecare are masa m. Se neglijează frecările.

Răspuns: $l = \dfrac{4R \operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

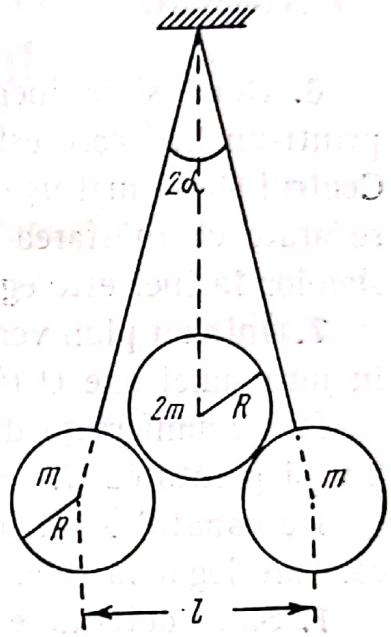


Fig. 1.32.

2. Sub ce unghi minim α față de orizontală trebuie aplicată o forță la muchia de sus a unui corp paralelipipedic cu lungimea l și înălțimea h, pentru a-l deplasa fără a-l răsturna. Coeficientul de frecare este μ. Să se afle mărimea acestei forțe, dacă se știe că masa corpului este m.

Răspuns: $F = mg\sqrt{\left(\dfrac{l}{2h}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{l}{2\mu h}\right)^2}$

$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{2\mu h - l}{\mu l}\right)$.

3. Pe un plan orizontal se află un cilindru, pe care se sprijină capătul unei scînduri. Ce valoare trebuie să aibă unghiul limită α dintre scîndură și plan, cînd cilindrul se află în echilibru, dacă coeficientul de frecare dintre scîndură și cilindru este μ? Frecarea pe plan este foarte mare.

Răspuns: $\alpha = \operatorname{arc\,cos}\dfrac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}$.

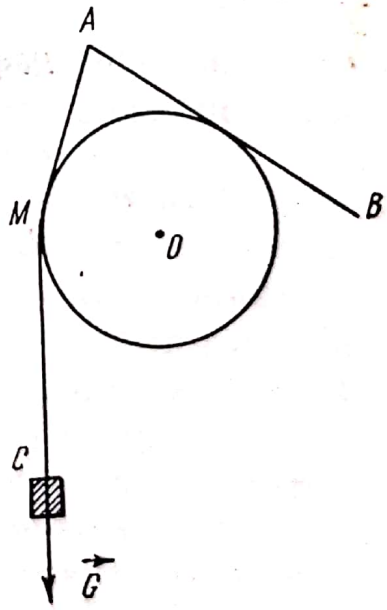


Fig. 1.33.

4. La ce înălțime h se poate ridica un om cu masa de $M = 60$ kg pe o scară cu lungimea $l = 3$ m, sprijinită de un perete lucios și înclinată față de acesta cu $\alpha = 30°$? Masa scării este $m = 20$ kg. Coeficientul de frecare dintre podea și scară este $\mu = 0{,}5$.

Răspuns: $\dfrac{h\mu l(M + m)\cos 30° - Ml/_2 \sin 30°}{m \operatorname{tg} 30°}$

5. Un punct material aflat în echilibru pe un plan înclinat este acționat de două forțe egale cu jumătate din greutatea sa. Una dintre forțe acționează pe direcția orizontalei iar a doua de-a lungul planului înclinat, urmînd linia de pantă maximă. Amîndouă forțele au tendința **de a ridica** punctul material pe plan. Să se determine unghiul α al planului față de orizontală.

Răspuns: $\alpha = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$.

6. Două sfere inegale sînt suspendate de capetele unui fir trecut printr-un inel care este prins de un cui. Cele două sfere sînt tangente. Centrul sferei mai ușoare este mai jos față de cel al sferei mai grele. Să se arate că în starea de echilibru, raportul distanțelor de la centrele sferelor la inel este egal cu inversul raportului greutăților sferelor.

7. Într-un plan vertical se află un disc cu raza R, care se poate roti în jurul unei axe O (fig. 1.33).

Pe circumferința discului se află o bară omogenă AB, cu lungimea $2a$ și greutatea G.

De capătul A al barei este legat un fir AMC cu masa neglijabilă, care are legat la celălalt capăt un corp cu greutatea G.

1. Să se determine condiția de echilibru a sistemului.

2. Să se determine forța de apăsare $\vec{N}$ exercitată de bară pe disc. Se neglijează frecările:

Răspuns: 1. $a \leqslant 2R$; 2. $N = \frac{8aR}{4R^2 + a^2}$.

Capitolul II

Cinematica și dinamica mișcării curbilinii a punctului material

2.1. **Relativitatea mișcării.** *Sistem de referință.* Mișcarea mecanică care constă în schimbarea poziției unui corp în raport cu un alt corp considerat fix, poate fi studiată din două puncte de vedere: din punct de vedere geometric *(cinematica)* și din punct de vedere al cauzelor sale *(dinamica)*.

Mișcarea mecanică se petrece în spațiu și timp. Corpul în raport cu care se studiază mișcarea se numește *reper*, *referențial* sau *sistem de referință*. Referențialul este un solid rigid de care s-a fixat un sistem de coordonate, de exemplu un sistem cartezian de trei axe.

Caracterul fundamental al mișcării este relativitatea sa, neconcepîndu-se mișcarea unui corp decît în raport cu alte corpuri, pe care prin convenție le considerăm fixe. Dacă un corp ar fi singur în spațiu nu ar exista repere și noțiunile de mișcare sau repaus nu ar avea sens.

2.2. **Traiectoria.** Se numește traiectorie linia dreaptă sau curbă descrisă de mobil în timpul mișcării sale, adică locul geometric al pozițiilor succesive ale mobilului în raport cu reperul ales.

Am văzut că noțiunile de repaus și de mișcare nu au sens decît relativ la un reper. Același lucru și pentru traiectorie, adică forma traiectoriei depinde de sistemul de referință ales. Pentru exemplificare să considerăm un cal de lemn de pe un carusel numit „călușei", întîlnit în parcurile de distracții. Observatorul care se află pe calul de lemn, vede un punct de pe cal în repaus și traiectoria se reduce la un singur punct M. Dacă observatorul se află pe platforma caruselului, traiectoria punctului este un segment de dreaptă vertical, parcurs de punct alternativ de jos în sus și de sus în jos. Dacă observatorul se află pe Pămînt, traiectoria punctului M este o curbă sinuoasă (fig. 2.1).

Scanned with OKEN Scanner

Un al doilea exemplu îl constituie un obiect lansat dintr-un avion. Pentru un observator terestru, traiectoria este curba *c*. Aviatorul vede obiectul mișcîndu-se pe o traiectorie liniară tot timpul sub avion, apro-

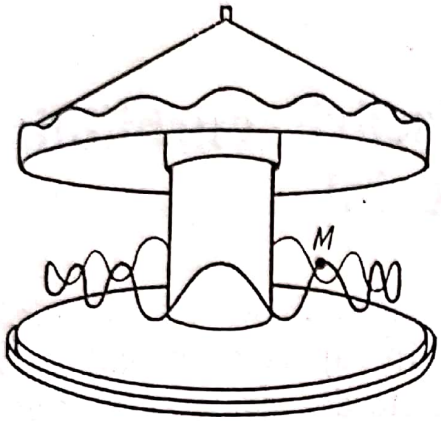


Fig. 2.1. Forma traiectoriei depinde de sistemul de referință ales.

piindu-se din ce în ce mai mult de Pămînt, dacă se neglijează rezistența aerului (fig. 2.2.)

2.3. **Cinematica punctului material.** Cinematica reprezintă un studiu geometric al mișcării. În cinematică masa punctului material nu interesează, de aceea punctul material devine un *mobil*, adică un punct geometric care se mișcă.

2.4. **Modul de descriere a mișcării punctului material.** Deoarece

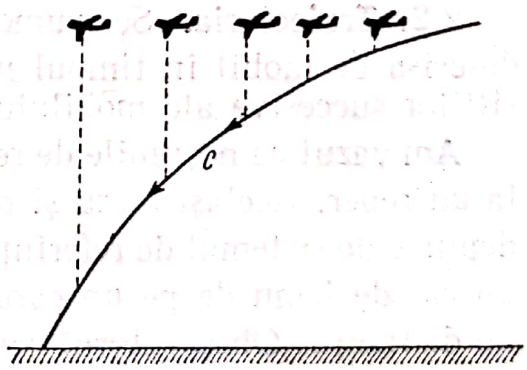


Fig. 2.2. Traiectoria unui corp lansat din avion.

traiectoriile mișcărilor pe care le vom studia sînt curbe plane, vom raporta mișcările la un sistem de coordonate ortogonal de două axe (*Ox*, *Oy*).

Pentru descrierea geometrică a mișcării se folosesc următoarele procedee:

1. Se fixează poziția mobilului în planul xOy cu ajutorul unui vector $\vec{r}$, dus din originea axelor de coordonate la mobilul M, numit vectorul de poziție al punctului M (fig. 2.3).

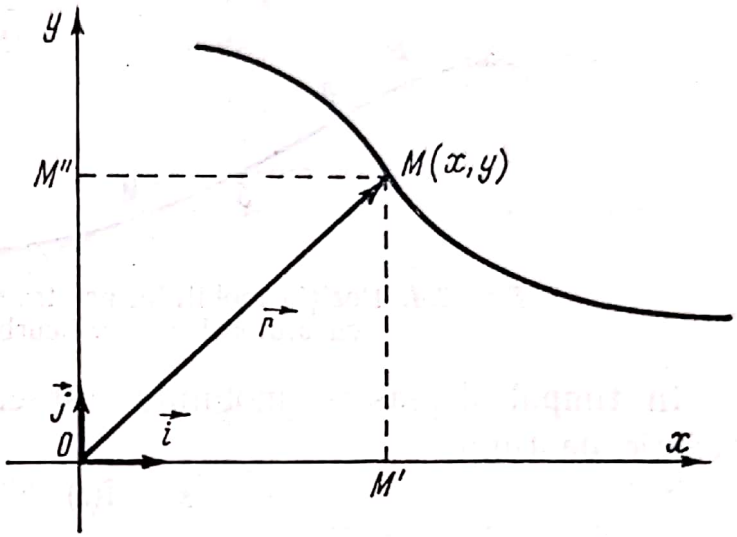


Fig. 2.3. Poziția mobilului pe traiectorie este determinată cu ajutorul vectorului de poziție $\vec{r}$.

În timpul mișcării mobilului, modulul și direcția vectorului $\vec{r}$ variază în timp, deci:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (2.1)$$

Relația (2.1) reprezintă legea de mișcare a mobilului. Locul geometric al extremității vectorului reprezintă traiectoria mobilului.

2. Se proiectează vectorul $\vec{r}$ pe cele două axe de coordonate. Se reprezintă vectorul $\vec{r}$ cu ajutorul proiecțiilor:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j},$$

unde $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt versorii axelor de coordonate.

Dacă $\vec{r}$ este funcție de timp atunci și

$$x = x(t), \quad y = y(t). \qquad (2.2)$$

Cu ajutorul proiecțiilor putem determina în orice moment poziția mobilului pe traiectorie. Funcțiile (2.2) reprezintă legile de mișcare ale mobilului (ecuațiile cinematice ale mișcării).

3. Mișcarea poate fi descrisă cu ajutorul legii de mișcare pe traiectorie, cînd traiectoria mobilului este cunoscută (printr-o ecuație dată).

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm un mobil M care se deplasează pe traiectoria curbilinie AB (fig. 2.4). Alegem pe traiectorie un punct origine O și orientăm traiectoria luînd pe ea un sens pozitiv determinat. Poziția mobilului este determinată pe traiectorie în fiecare moment, în raport cu originea O, dacă se cunoaște valoarea algebrică a arcului $s = OM$, care se numește abscisă curbilinie.

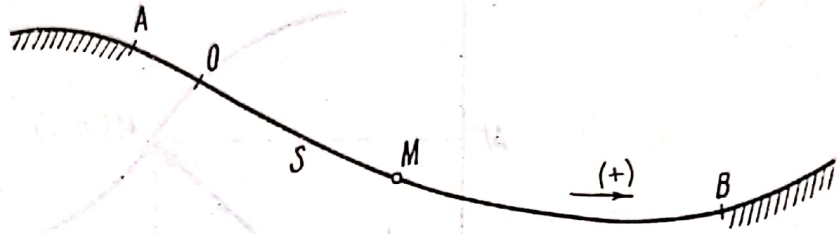


Fig. 2.4. Poziția mobilului pe traiectorie se determină cu ajutorul abscisei curbilinii s.

În timpul deplasării mobilului, abscisa curbilinie variază, fiind funcție de timp:

$$s = f(t). \tag{2.4}$$

Funcția (2.4) reprezintă legea de mișcare a mobilului pe traiectorie.

2.5. **Viteza scalară.** Să considerăm că mobilul se află la momentul t în punctul M de pe traiectorie. În intervalul de timp Δt el se deplasează din M în M' parcurgînd porțiunea de traiectorie Δs (fig. 2.5). Se notează cu v_m și se numește viteză medie în punctul M relativ la porțiunea de traiectorie MM' raportul

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

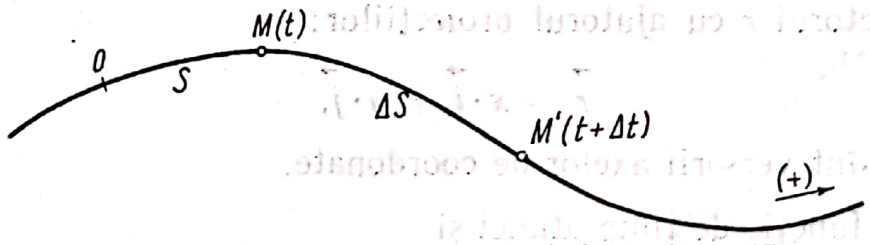


Fig. 2.5. Mobilul parcurge spațiul Δs în timpul Δt.

Dacă intervalul de timp Δt tinde către zero viteza medie tinde către o limită v numită viteză instantanee sau momentană în punctul M:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Dacă $v > 0$, mobilul se mișcă în sensul pozitiv ales pe traiectorie.

Scanned with OKEN Scanner

2.6. **Vectorul viteză.** În cazul mișcării curbilinii, viteza astfel definită este insuficientă pentru studiul mișcării. Cunoașterea mișcării mobilului pe traiectorie implică cunoașterea direcției și sensului mișcării acestuia. Se impune definirea unor mărimi care să corespundă acestor cerințe.

Fie M și M' pozițiile mobilului la momentele t și $t + \Delta t$. Dacă considerăm poziția de plecare M și poziția de sosire M', fără a ține cont

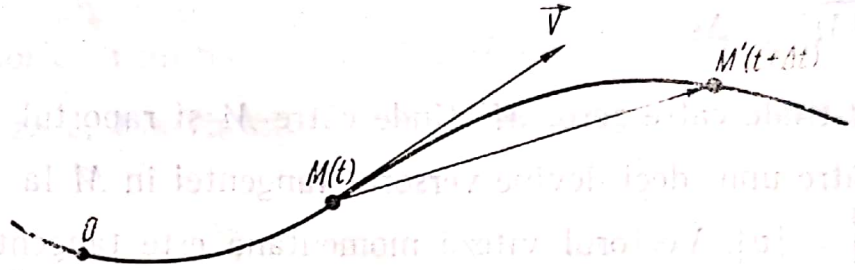


Fig. 2.6. Viteza momentană a mobilului este reprezentată printr-un vector tangent la traeictorie.

de pozițiile intermediare, spunem că mobilul a efectuat o deplasare $\overline{MM'}$ (fig. 2.6). Adică în intervalul de timp Δt mobilul s-a deplasat pe direcția vectorului $\overrightarrow{MM'}$, prin urmare pe direcția unei drepte. Rezultă că deplasarea este reprezentată printr-un vector. Acest procedeu de a descrie mișcarea îl presupunem valabil pentru intervale de timp Δt suficient de mici.

Putem să exprimăm deplasarea medie în unitatea de timp în intervalul $(t, t + \Delta t)$. Aceasta este o mărime vectorială

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

și se numește vectorul viteză medie.

Limita vectorului viteză medie cînd Δt tinde spre zero se numește vectorul viteză instantanee sau momentană:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}.$$

Dacă Δt tinde către zero, M' tinde către M, suportul vectorului $\overrightarrow{MM'}$ (adică secanta MM') tinde spre dreapta tangentă în M la traiectorie, și raportul $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ va avea aceeași direcție.

Scanned with OKEN Scanner

Intervalul de timp Δt fiind pozitiv, sensul raportului $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ este același cu al vectorului $\overrightarrow{MM'}$, adică sensul mișcării.

Vectorul viteză medie se poate scrie astfel:

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\overset{\frown}{MM'}} \cdot \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\overset{\frown}{MM'}} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

deoarece $\overset{\frown}{MM'} = \Delta s$.

Dacă Δt tinde către zero, M' tinde către M și raportul $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\overset{\frown}{MM'}}$ tinde în modul către unu, deci devine versorul tangentei în M la traiectorie. Atunci $|\vec{v}| = |v|$. Vectorul viteză momentană este tangent la traiectorie și are sensul deplasării mobilului și modulul său este egal cu valoarea absolută a vitezei scalare.

2.7. **Vectorul accelerație.** Într-o mișcare curbilinie, vectorul viteză poate să-și schimbe în fiecare moment, direcția, sensul și modulul. Variațiile vectorului viteză implică apariția unei accelerații.

Să considerăm la momentul t mobilul în M, cu viteza $\vec{v}$, la momentul $t + \Delta t$ mobilul s-a deplasat în M' și are viteza $\vec{v}'$ (fig. 2.7).

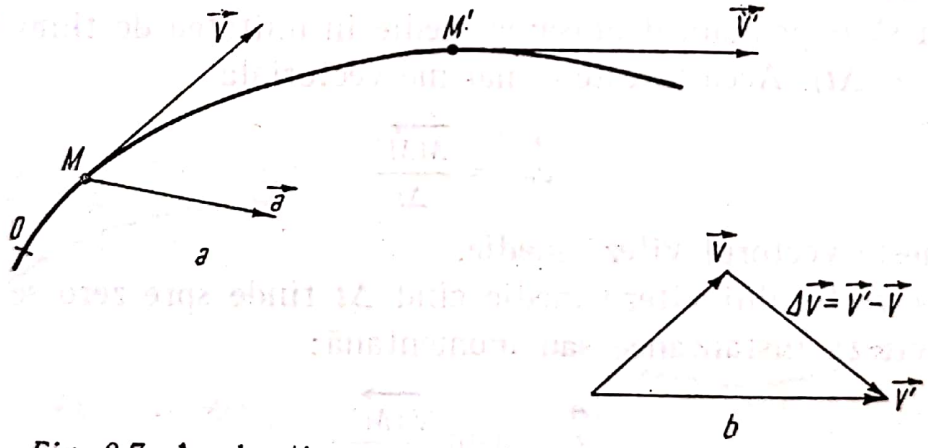


Fig. 2.7. Accelerația se reprezintă printr-un vector îndreptat înspre partea concavă a curbei.

Se notează cu $\vec{a}_m$ și se numește vectorul accelerație medie raportul:

$$\vec{a}m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Scanned with OKEN Scanner

ce reprezintă variația medie a vectorului $\vec{v}$ în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$.

Cînd Δt tinde către zero, vectorul $\vec{v}'$ tinde către $\vec{v}$. Se demonstrează că limita către care tinde $\vec{a}_m$ este un vector $\vec{a}$ numit vectorul accelerație instantanee sau momentană, la momentul t. Orginea vectorului $\vec{a}$ este în M. Direcția, sensul și modulul vectorului $\vec{a}$ depind de starea de mișcare a mobilului la momentul considerat. Deci oricărui mobil în mișcare pe traiectorie curbilinie îi sînt atașați doi vectori caracteristici: a) vectorul viteză $\vec{v}$, luat întotdeauna pe tangenta la traiectorie și orientat

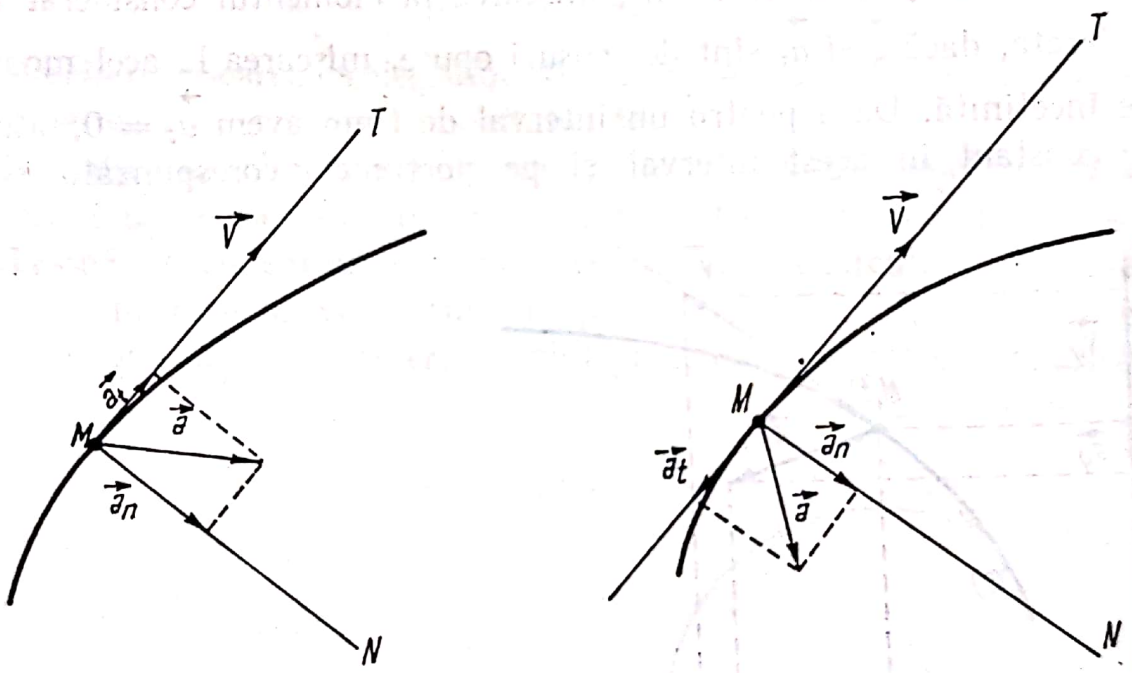


Fig. 2.8. Accelerația se poate descompune într-o componentă tangentă la traiectorie și una perpendiculară pe aceasta.

în sensul mișcării, b) vectorul accelerație $\vec{a}$, a cărui direcție este impusă de modul de mișcare a mobilului.

2.8. **Accelerația tangențială și accelerația normală.** Remarcăm că vectorul accelerație se află întotdeauna de partea concavă a traiectoriei mobilului, de partea unde se află centrul de curbură (fig. 2.8).

Scanned with OKEN Scanner

Proiectăm vectorul accelerație pe direcția tangentei MT și pe direcția perpendiculară pe aceasta, MN, numită normală. Obținem două componente rectangulare ale accelerației $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n ,$$

accelerația tangențială $\vec{a}_t$, care caracterizează variația modulului vectorului viteză $\vec{v}$ și accelerația normală $\vec{a}_n$ care caracterizează variația direcției vectorului viteză. Măsura scalară a accelerației tangențiale este $a_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Dacă $\vec{v}$ și $\vec{a}_t$ au același sens, mișcarea la momentul considerat este accelerată, dacă $\vec{v}$ și $\vec{a}_t$ sînt de sensuri opuse, mișcarea la acel moment este încetinită. Dacă pentru un interval de timp avem $\vec{a}_t = 0$, atunci v = constant în acest interval și pe porțiunea corespunzătoare de

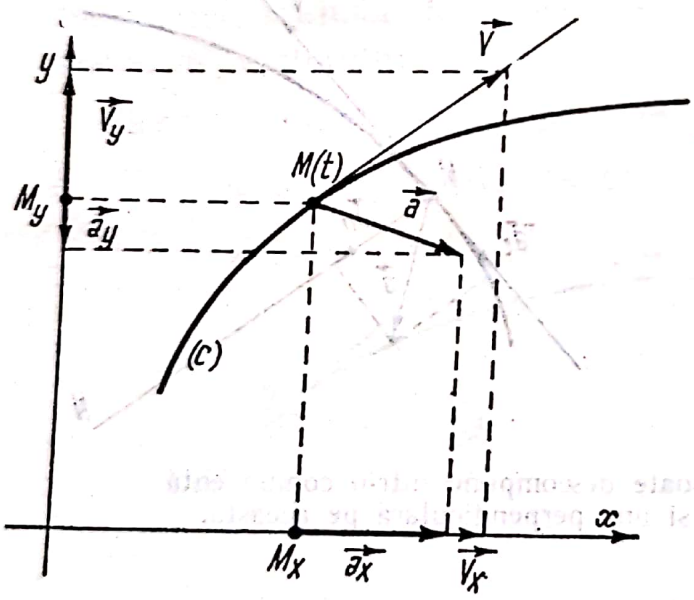


Fig. 2.9. Mișcarea punctului material în plan poate fi descompusă în două mișcări rectilinii de-a lungul axelor de coordonate alese.

traiectorie, care poate fi curbilinie, mișcare este uniformă (curbilinie uniformă).

2.9. **Mișcarea rectilinie a proiecțiilor unui mobil M pe axele de coordonate Ox și Oy.** Să considerăm mobilul M care se mișcă pe o traiectorie curbilinie plană (c) (fig. 2.9). În timpul cît mobilul descrie

Scanned with OKEN Scanner

curba (c), proiecțiile sale M_1 și M_2 pe axele de coordonate descriu dreptele Ox și Oy. Ecuațiile de mișcare ale punctelor M_1 și M_2 sînt:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t),$$

care sînt în același timp și coordonatele punctului M la momentul t, față de sistemul de coordonate Ox, Oy.

Vectorii viteză $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ ai punctelor M_1 și M_2 sînt proiecțiile vitezei $\vec{v}$ pe axele de coordonate, deci:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

La fel și accelerațiile $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$ ale punctelor sînt proiecțiile accelerației $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2.$$

Cunoscînd mișcarea proiecțiilor M_1 și M_2 ale punctului M, putem determina legea de mișcare a mobilului M.

2.10. **Mișcarea circulară uniformă.** Mișcarea unui punct material care descrie un cerc este o mișcare circulară. Dacă modulul vitezei mobilului este independent de timp, mișcarea se numește circulară uniformă. De această mișcare ne vom ocupa în primul rînd.

Considerăm un punct material mobil pe cercul orientat O (fig. 2.10).

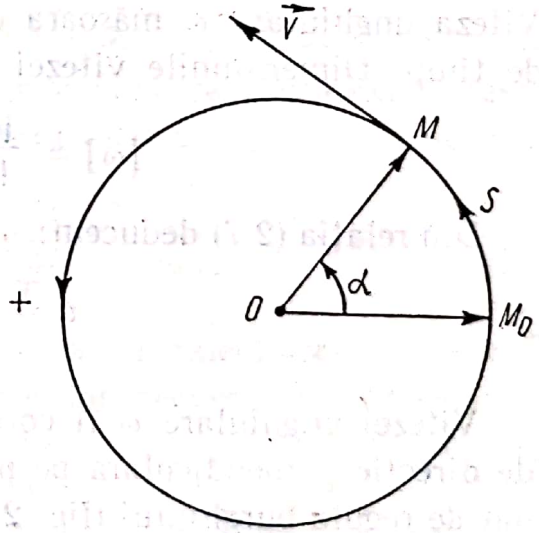


Fig. 2.10. În cazul mișcării circulare viteza este perpendiculară pe raza vectoare.

Fie M_0 originea absciselor curbilinii. Poziția mobilului este determinată pe traiectorie fie prin abscisa curbilinie $\widehat{M_0M} = s$, fie prin coordonata unghiulară, care este măsura unghiului $M_0OM = \alpha$, măturat de raza

Scanned with OKEN Scanner

vectoare $\vec{r}$. Deci pentru a cunoaște poziția mobilului pe traiectorie, trebuie să cunoaștem una din funcțiile:

$$s = f(t), \quad \alpha = \varphi\ (t), \tag{2.5}$$

care exprimă legea de mișcare a mobilului pe traiectorie.

Mărimile s și α sînt legate prin relația:

$$s = r\alpha, \quad (\alpha \text{ în radiani}). \tag{2.6}$$

Mișcarea mobilului fiind presupusă uniformă, trebuie ca s și α să fie funcții liniare de timpul t.

2.11. **Viteza liniară și viteza unghiulară.** Din egalitatea (2.6) deducem:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r\,\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}. \tag{2.7}$$

Primul membru nu este altceva decît modulul vitezei liniare $\vec{v}$ a mobilului. Aceasta fiind constantă trebuie ca raportul $\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ să fie de asemenea constant. Acest raport se notează cu ω și se numește viteză unghiulară:

$$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}. \tag{2.8}$$

Viteza unghiulară ω măsoară creșterea unghiului polar α în unitatea de timp. Dimensiunile vitezei unghiulare sînt:

$$[\omega] = \frac{[\alpha]}{[t]} = T^{-1} = 1\ s^{-1}.$$

Din relația (2.7) deducem:

$$v = r\omega, \quad \omega = \frac{v}{r}. \tag{2.9}$$

Vitezei unghiulare ω îi corespunde un vector viteză unghiulară $\vec{\omega}$, de direcție perpendiculară pe planul cercului în O și al cărui sens este dat de regula burghiului (fig. 2.11). Originea vectorului este în O. Între vectorul $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ și $\vec{r}$ există relația de legătură

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{2.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

2.12. **Perioadă.** *Frecvență.* Traiectoria circulară este descrisă de mobil în intervalul de timp:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{2.11}$$

după care mobilul revine în același punct, și mișcarea se repetă. Intervalul de timp T în care mobilul descrie o circumferință se numește

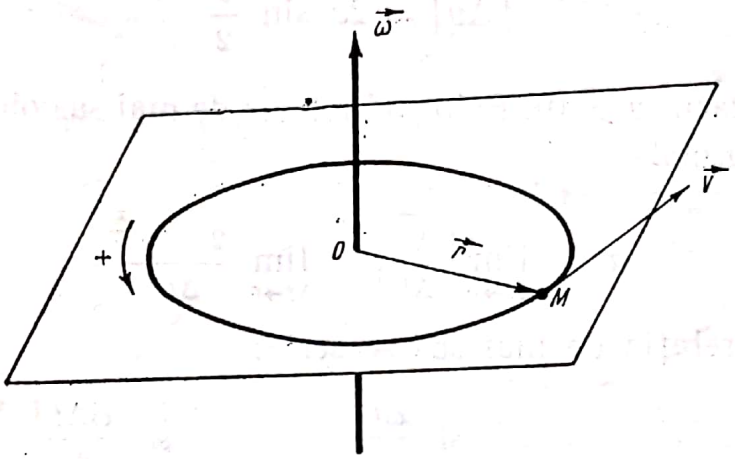


Fig. 2.11. Viteza unghiulară se reprezintă printr-un vector perpendicular pe planul traiectoriei, iar sensul este dat de înaintarea burghiului care se rotește în același sens cu punctul material.

perioadă. Numărul de rotații efectuate într-o secundă se numește frecvență și se notează cu ν sau n. Între perioadă și frecvență există relația de legătură $\nu = 1/T$. Relațiile de legătură între v, ω, T și ν sînt următoarele:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\ \pi\nu; \quad v = \frac{2\pi r}{T} = 2\ \pi r\nu. \tag{2.11}$$

Se constată că ω este independentă de raza r a traiectoriei circulare. Perioada se măsoară în secunde, $[T] = 1$ s, iar frecvența are dimensiunile $[\nu] = 1\ s^{-1} = 1$ Hz (unitate numită hertz), $[n] = 1\ s^{-1}$ sau rot/s. În tehnică turația n se măsoară de obicei în rot/min.

Funcțiile (2.5), în cazul mișcării circulare uniforme au forma

$$s = vt, \quad \alpha = \omega t. \tag{2.12}$$

2.13. **Accelerația normală.** Deoarece în mișcarea circulară uniformă modulul vitezei liniare este constant, accelerația tangențială este zero.

Scanned with OKEN Scanner

Absența acestei accelerații justifică denumirea de mișcare circulară uniformă. În această mișcare nu există decît accelerație normală.

Deoarece direcția vectorului viteză $\vec{v}$ se modifică în fiecare moment (fig. 2.12), variația $\Delta\vec{v}$ a acestuia se obține ducînd în M_2 un vector echipolent cu $\vec{v}_1$. În triunghiul ABM_2 unghiul $AM_2B = \alpha$, deci

$$|\Delta\vec{v}| = 2v \sin\frac{\alpha}{2}$$

(am presupus cazul $v > 0$). Folosind relația de mai sus obținem modulul accelerației normale

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2v \sin\frac{\alpha}{2}}{\Delta t}.$$

Cum $\alpha = \omega t$, relația de mai sus se scrie:

$$a_n = v \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \frac{\sin\frac{\omega t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} = v\omega \lim \frac{\sin\frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}}$$

Dar $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\sin\frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}} = 1$, deci

$$a_n = v\omega = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}. \qquad (2.13)$$

Direcția variației $\Delta\vec{v}$ deci și a accelerației $\Delta\vec{v}/\Delta t$ devine la limita cînd $\Delta t \to 0$, perpendiculară pe $\vec{v}$, deci pe traiectorie. Mărimea $\vec{a}_n$ reprezintă modulul vectorului accelerație normală $\vec{a}_n$ ($\vec{a}_n \perp \vec{v}$) (fig. 2.13). Accelerația normală se mai numește și accelerație centripetă.

2.14. **Mișcarea circulară uniform variată.** Să considerăm un mobil care se mișcă cu viteză variabilă pe un cerc cu raza r și anume mobilul descrie o mișcare circulară uniform variată. Vom defini mărimile caracteristice ale acestei mișcări.

Scanned with OKEN Scanner

Viteza unghiulară instantanee. Mărimea $\omega_m = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ reprezintă viteza unghiulară medie. Dacă intervalul de timp Δt tinde către zero, raportul

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

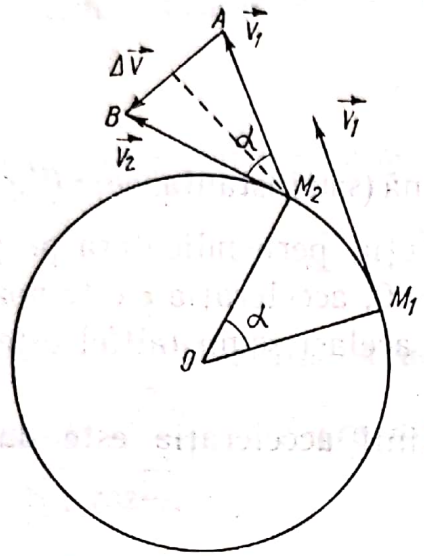


Fig. 2.12. În timpul Δt viteza variază cu mărimea Δv.

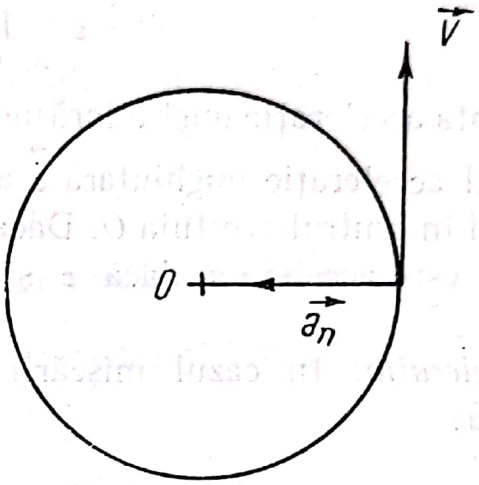


Fig. 2.13. Acceleraţia în cazul mişcării circulare este un vector îndreptat spre centrul cercului.

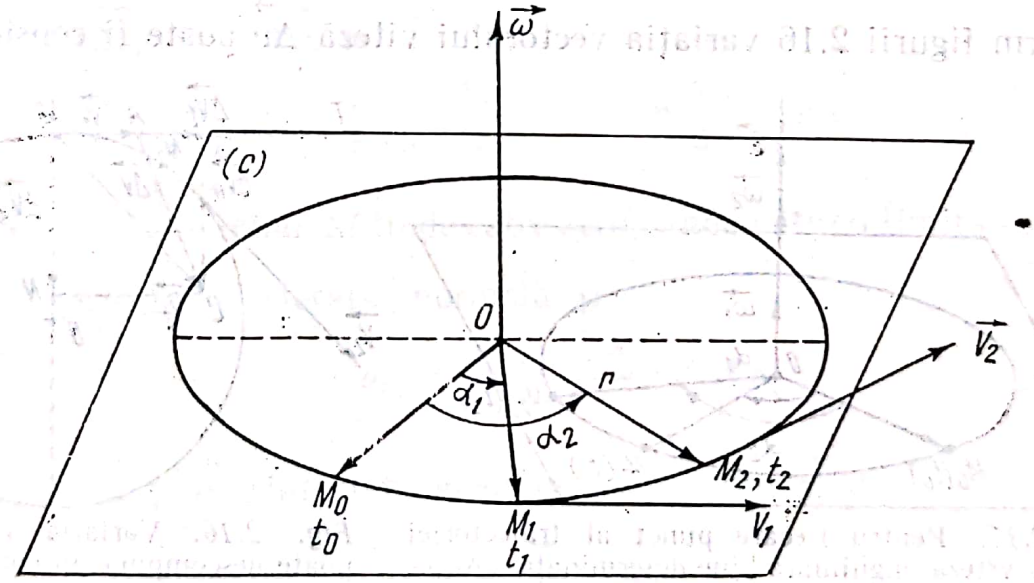


Fig. 2.14. În cazul mişcării circulare uniform accelerate mobilul nu mai parcurge arce egale în intervale de timp egale.

reprezintă viteza unghiulară momentană sau proiecţia vectorului viteză unghiulară instantanee (sau momentană), $\vec{\omega}$, pe normala la planul mişcării dusă prin O şi al cărei sens este dat de regula burghiului, ţinînd seamă de sensul pozitiv de măsurare a unghiurilor (fig. 2.14).

Scanned with OKEN Scanner

Accelerația unghiulară instantanee. Notăm cu ε_m și numim accelerație unghiulară medie raportul

$$\varepsilon_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Dacă Δt tinde către zero, limita:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

reprezintă accelerația unghiulară momentană (sau instantanee) ε (fig. 2.15). Vectorul accelerație unghiulară $\vec{\varepsilon}$ are direcția perpendiculară pe planul cercului în centrul acestuia O. Dacă $\Delta\omega > 0$, accelerația ε este pozitivă. Rotația este accelerată dacă ε și ω au același semn (altfel este încetinită).

Accelerația. În cazul mișcării curbilinii accelerația este dată de expresia:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Conform figurii 2.16 variația vectorului viteză $\Delta\vec{v}$ poate fi considerată

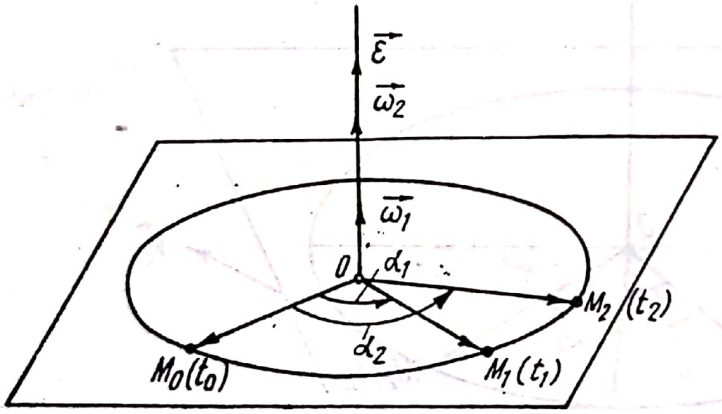


Fig. 2.15. Pentru fiecare punct al traiectoriei avem o viteză unghiulară bine determinată. Accelerația unghiulară, constantă ca valoare, este reprezentată printr-un vector care are aceeași direcție ca și viteza.

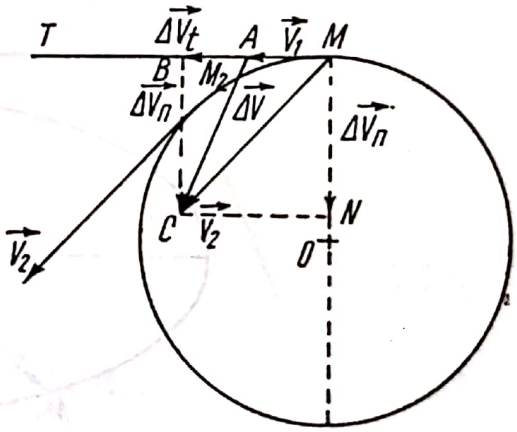


Fig. 2.16. Variația vitezei se poate descompune în componenta $\Delta\vec{v}_t$, tangentă la traiectorie și $\Delta\vec{v}_n$, perpendiculară pe aceasta.

ca rezultanta a doi vectori componenți: a) vectorul $(\Delta\vec{v})_t$ care reprezintă componenta vectorului $\Delta\vec{v}$ pe direcția tangentei MT; b) vectorul $(\Delta\vec{v})_n$

Scanned with OKEN Scanner

care reprezintă componenta vectorului $\Delta\vec{v}$ pe direcția razei OM. Vectorul $(\Delta\vec{a})_t$ caracterizează variația modulului vectorului viteză, iar vectorul $(\Delta\vec{v})_n$ caracterizează variația direcției vectorului viteză.

Scriem vectorul $\Delta\vec{v}$ cu ajutorul componentelor

$$\vec{v} = (\Delta\vec{v})_t + (\Delta\vec{v})_n .$$

Egalitatea de mai sus ne permite să calculăm accelerația medie

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(\Delta\vec{v})_t}{\Delta t} + \frac{(\Delta\vec{v})_n}{\Delta t} . \qquad (2.14)$$

Expresia (2.14) arată că accelerația medie este suma a doi vectori: vectorul $\frac{(\Delta\vec{v})_t}{\Delta t}$ care are direcția tangentei și vectorul $\frac{(\Delta\vec{v})_n}{\Delta t}$ care are direcția razei.

Cînd Δt tinde către zero raportul $\frac{(\Delta\vec{v})_t}{\Delta t}$ tinde către o limită care reprezintă vectorul accelerație tangențială. Avînd în vedere că $v = r\omega$, rezultă $(\Delta\vec{v})_t = r\,|\Delta\vec{\omega}|$ și

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\omega}{\Delta t} = r \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r\,\varepsilon.$$

Raportul $\frac{(\Delta\vec{v})_n}{\Delta t}$ (cînd Δt tinde către zero) tinde către o limită care reprezintă vectorul accelerație normală și

$$a_n = |\vec{a}_n| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Vectorii $\vec{a}_t$ și $\vec{a}_n$ sînt componentele accelerației $\vec{a}$, deci

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n. \qquad (2.15)$$

Modulul accelerației se calculează cu ajutorul formulei

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \qquad (2.16)$$

deoarece $\vec{a}_t$ este perpendicular pe $\vec{a}_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Poziția unui mobil pe traiectorie este determinată dacă se cunoaște forma funcției $\alpha = f(t)$. Dacă mișcarea este uniform accelerată această funcție are forma

$$\alpha = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2. \qquad (2.17)$$

Mărimile ω_0 și ε sînt constante.

Expresia (2.17) se deduce avînd în vedere că

$$\alpha = \omega_m t,$$

unde ω_m este viteza unghiulară medie, $\omega_m = \frac{\omega + \omega_0}{2}$. Dar $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon = \text{const}$ și $\omega - \omega_0 = \varepsilon t$, deoarece $\Delta t = t - t_0 = t$, $t_0 = 0$. Astfel,

$$\alpha = \frac{\omega + \omega_0}{2} t = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2.$$

Eliminînd timpul între (2.17) și egalitatea

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \qquad (2.18)$$

obținem

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\,\varepsilon\alpha \qquad (2.19)$$

analoagă ecuației lui Galilei.

2.15. **Dinamica mișcării circulare uniforme a punctului material.** Orice punct material în mișcare circulară uniformă posedă o accelerație centripetă constantă (în modul): $a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$. Ca să existe această accelerație, legea fundamentală a mecanicii arată că asupra punctului material trebuie să acționeze o forță

$$\vec{F} = m\vec{a}_n \quad (a_n = \omega^2 r),$$

care reprezintă rezultanta tuturor forțelor aplicate punctului material și care are direcția și sensul accelerației, deci este o forță centripetă (fig. 2.17).

Forța centripetă obligă punctul material să se miște pe un cerc. Datorită inerției, punctul material are tendința de a se mișca rectiliniu. O experiență simplă demonstrează că în absența forței centripete un corp nu poate descrie o mișcare circulară.

Într-un tub de sticlă introducem o bilă. Cînd tubul se află în poziție orizontală bila se află în echilibru în interiorul tubului. Dacă tubul se

Scanned with OKEN Scanner

rotește în planul orizontal, bila alunecă în interiorul tubului într-o mișcare relativă rectilinie, îndepărtîndu-se de axa de rotație, deci nu

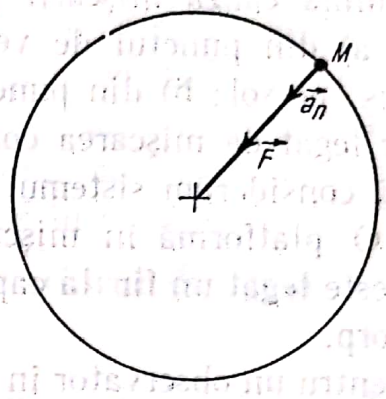


Fig. 2.17. Forța centripetă are aceeași direcție și sens cu $\vec{a}_n$.

poate să descrie o mișcare circulară, datorită lipsei forței centripete (fig. 2.18, *a* și *b*).

Introducem prin tubul de sticlă o sfoară. Legăm bila de capătul superior al sforii, iar de celălalt capăt al sforii legăm un alt corp *C* cu masa mai mare decît a bilei. Rotind tubul bila descrie o mișcare circu-

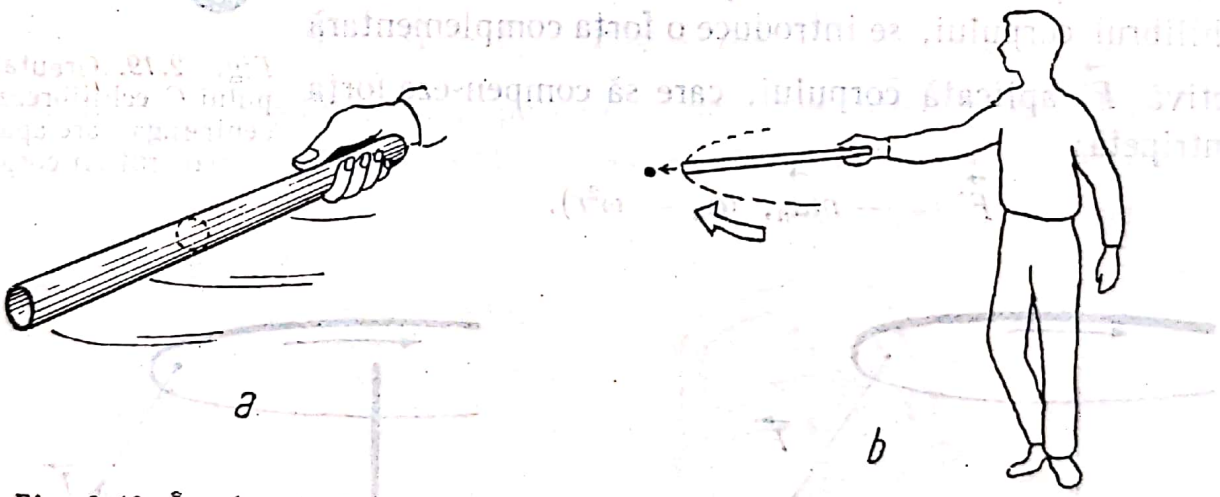


Fig. 2.18. În absența forței centripete un corp nu poate descrie o mișcare circulară.

lară sub acțiunea forței centripete, egală cu greutatea corpului de la celălalt capăt al sforii (fig. 2.19).

Forța centripetă acționează asupra bilei, abătînd-o de la traiectoria rectilinie pe care tinde să se deplaseze datorită inerției. Datorită inerției, bila reacționează asupra corpului *C* cu o forță numită forță centrifugă de inerție. Forța centripetă și forța centrifugă sînt aplicate la două corpuri diferite.

Cînd studiem mișcarea circulară uniformă a punctului material din punct de vedere dinamic, pentru a determina cauza mișcării putem alege două interpretări: a) din punctul de vedere al unui observator în repaus pe sol; b) din punctul de vedere al unui observator legat de mișcarea corpului.

Să considerăm sistemul reprezentat în fig. 2.20, *a* și *b*. O platformă în mișcare de rotație uniformă de care este legat un fir la capătul căruia este suspendat un corp.

Pentru un observator în repaus pe sol, corpul, aproximat cu un punct material, efectuează o mișcare circulară sub acțiunea forței centripete $\vec{F}$, care este rezultanta greutății $\vec{G}$ și a tensiunii din fir $\vec{T}$.

Pentru un observator legat de mișcarea corpului, acesta (corpul) se află în repaus. Pentru a explica echilibrul corpului, se introduce o forță complementară fictivă $\vec{F'}$ aplicată corpului, care să compenseze forța centripetă:

$$\vec{F'} = -m\vec{a}_n, \quad (a_n = \omega^2 r).$$

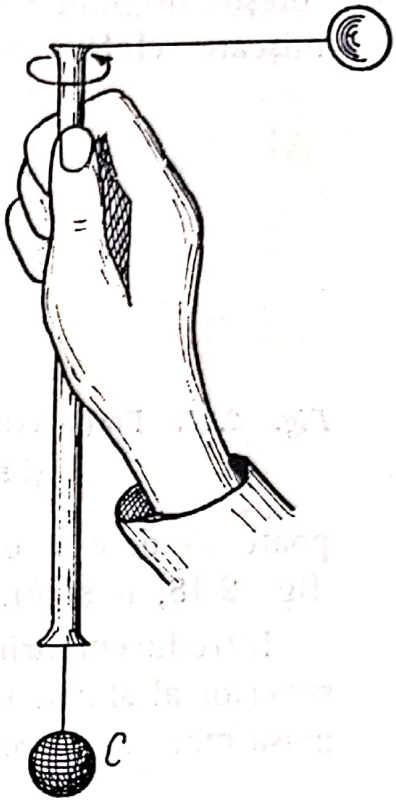


Fig. 2.19. Greutatea corpului *C* echilibrează forța centrifugă care apare datorită rotirii corpului.

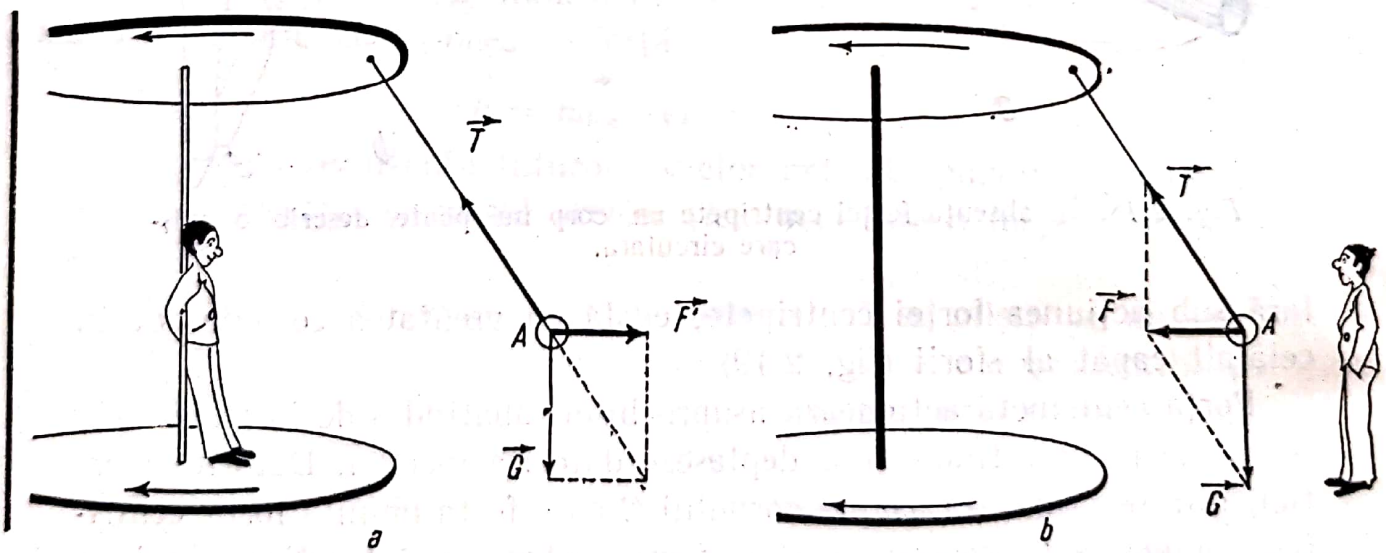


Fig. 2.20. Cum apare mișcarea de rotație și forțele care acționează asupra unui mobil pentru un observator imobil și pentru unul în mișcare cu platforma.

Scanned with OKEN Scanner

Forța complementară este echipolentă cu forța centrifugă de inerție, care reprezintă reacțiunea corpului asupra legăturii (motiv pentru care și forței complementare i s-a dat numele de forță centrifugă de inerție).

Forțele complementare fictive (numite impropriu și forțe de inerție) nu au sens și nu pot fi introduse decît în cazul unui observator legat de sistemul în mișcare accelerată (față de un reper inerțial). Introducerea forțelor complementare fictive permite interpretarea simplă a diverselor fenomene care ilustrează efectele inerției corpurilor în rotație.

2.16. **Înclinarea drumurilor la curbe.** Fie un vehicul de masă m, care are viteza $\vec{v}$ la un viraj cu raza $\vec{r}$ (fig. 2.21).

Pentru un observator legat de vehicul, vehiculul, al cărui centru de greutate descrie o mișcare circulară uniformă, este în echilibru relativ față de observator și se explică dacă adunăm vectorial o forță complementară fictivă $\vec{F}_c = -m\vec{a}_n$, la forțele care acționează asupra vehiculului. Cum greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$ figurează printre acestea, forța

$$\vec{G}' = \vec{G} + \vec{F}_c = m(\vec{g} - \vec{a}_n)$$

joacă în echilibrul relativ rolul pe care-l joacă greutatea în raport cu Pămîntul. Se poate spune că pentru observatorul în mișcarea de rotație

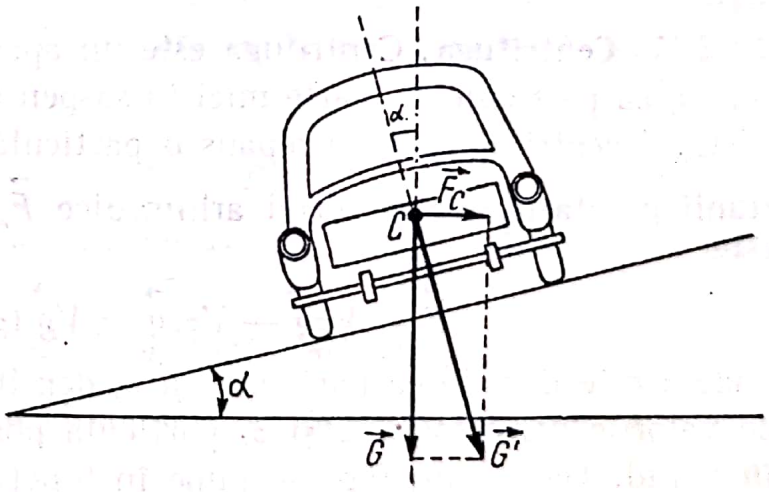


Fig. 2.21. Forța centrifugă $\vec{F}_c$ și greutatea G dau o componentă $\vec{G}'$ perpendiculară pe planul mișcării.

uniformă forța $\vec{G}'$ reprezintă greutatea aparentă a vehiculului. Aceasta este perpendiculară pe planul înclinat al drumului și este egală în modul și de sens opus reacțiunii solului.

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$\vec{G}' + \vec{R} = 0.$$

Din figura 2.21 rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{m\dfrac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg}.$$

Înclinarea care trebuie dată drumului față de orizontală, depinde de viteza vehiculului la viraj și de raza de curbură a drumului.

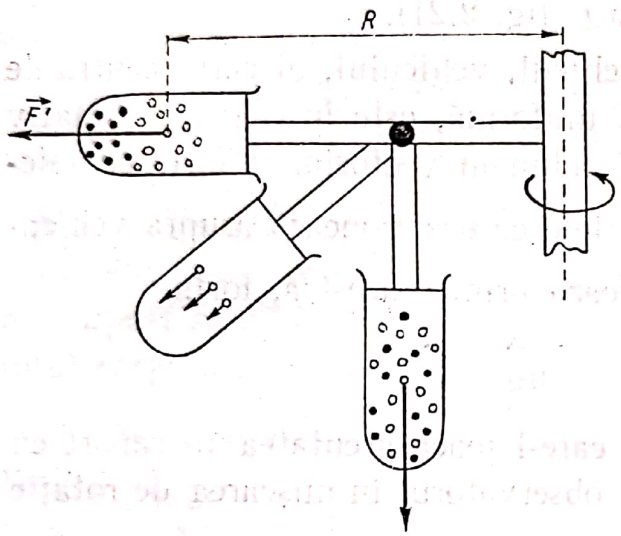


Fig. 2.22. Granulele se separă după densitatea lor datorită acțiunii forței centrifuge.

2.17. **Centrifuga.** Centrifuga este un aparat care se folosește pentru separarea particulelor foarte mici în suspensie într-un lichid (fig. 2.22).

Cînd centrifuga este în repaus o particulă de lichid este supusă acțiunii greutății sale și forței arhimedice $\vec{F}_A$. Rezultanta acestor forțe este

$$\vec{F} = V\rho\vec{g} - V\rho_e\vec{g} = V\vec{g}\,(\rho - \rho_l),$$

unde ρ este densitatea particulei și ρ_l densitatea lichidului. În funcție de valorile densităților ρ și ρ_l particula poate să coboare sau să urce în lichid. Dacă centrifuga se pune în funcțiune, pentru un observator legat de centrifugă, greutatea aparentă a unei particule va fi $\vec{G}' = m(\vec{g} - \vec{a}_n)$. Rotația fiind foarte rapidă, atunci $g \ll a_n$ și accelerația gravitațională se înlocuiește cu vectorul $-\vec{a}_n$ de modul $\omega^2 r$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru observatorul care se rotește odată cu o particulă m din lichid, aceasta este supusă forței cu intensitatea

$$F' = V(\rho - \rho_l)\,\omega^2 r.$$

La turații mari această forță va fi mare și particulele vor fi împinse puternic spre pereții vasului, permițînd astfel o separare *rapidă* a acestora.

2.18. **Aplicație. Regulatorul cu bile. Pendulul conic.** Presupunem regulatorul redus la bilele M și M' de masă m fixate pe două tije arti-

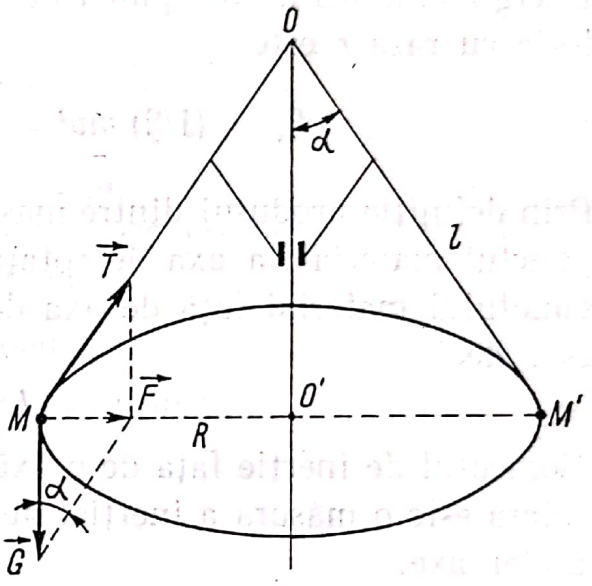


Fig. 2.23. În cazul pendulului conic forța centripetă apare ca rezultantă a componentei greutății corpului cu forța de tensiune în fir.

culate în O de masă neglijabilă (fig. 2.23). În timpul funcționării sistemului, fiecare bilă descrie o mișcare circulară uniformă. Rezultanta forțelor aplicate unei bile

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{T}$$

trebuie să fie deci perpendiculară pe axa de rotație, adică este o forță axipetă și are modulul

$$F = ma_n = mv^2/R = m\omega^2 R,$$

unde $R = l \sin \alpha$ este raza circumferinței descrisă de bilă, iar l este lungimea tijei.

Din figura 2.23 reiese că $F = mg \operatorname{tg} \alpha$. Egalăm cele două valori obținute pentru modulul forței $mg \operatorname{tg} \alpha = ml\omega^2 \sin \alpha$, deci

$$\frac{g}{\cos \alpha} = l\omega^2, \text{ sau } \cos \alpha = \frac{g}{l\omega^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această ecuație are soluție numai în cazul cînd

$$\frac{g}{l\omega^2} \leqslant 1 \text{ sau } \omega^2 \geqslant \frac{g}{l}.$$

Există deci o viteză minimă $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ de la care bilele încep să se îndepărteze de axa de rotație.

2.19. **Energia cinetică a punctului material în mișcare circulară.** Energia cinetică a unui punct material în mișcare circulară pe o traiectorie cu raza r este

$$E_c = (1/2)\, mv^2 = (1/2)\, mr^2\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Prin definiție produsul dintre masa particulei și pătratul distanței de la punctul material la axa de rotație se numește *momentul de inerție* al punctului material față de axa de rotație. Acest moment, notat cu I, este deci

$$I = mr^2.$$

Momentul de inerție față de o axă a punctului material în mișcare circulară este o măsură a inerției punctului în mișcarea circulară în jurul acelei axe.

Valoarea momentului de inerție depinde în afară de masa punctului material și de distanța masei față de axa de rotație.

Dimensiunile momentului de inerție

$$[I] = [m]\,[r^2] = ML^2 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

2.20. **Momentul cinetic al punctului material în mișcare circulară.** Momentul vectorului impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ în raport cu un pol O se numește *moment cinetic* în raport cu un punct și se notează prin $\vec{L}_0(m\vec{v})$. Momentul vectorului $m\vec{v}$ se calculează în același mod ca și momentul unei forțe. Vom considera în acest caz că vectorul $m\vec{v}$ este aplicat unui punct material în mișcare. Momentul impulsului $m\vec{v}$ al punctului material în mișcare (fig. 2.24) în raport cu un punct O este vectorul

$$\vec{L}_0(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}. \qquad (2.24)$$

Scanned with OKEN Scanner

Modulul momentului cinetic este

$$L_0(\vec{mv}) = b.mv, \tag{2.25}$$

unde b este lungimea perpendicularei coborîtă din O pe suportul vectorului impuls.

Momentul cinetic în raport cu o axă este egal cu proiecţia pe această axă a vectorului moment cinetic $\vec{L}_0$ în raport cu un punct O oarecare al axei:

$$L_z(\vec{mv}) = L_0(\vec{mv}) \cos \alpha \tag{2.26}$$

unde α este unghiul dintre vectorul $\vec{L}_0$ şi axă.

Momentul cinetic al unui punct material care descrie o mişcare circulară, în raport cu centrul de rotaţie, are modulul:

$$L_0 = mvr = mr^2\omega \text{ sau } L_0 = I\omega, \tag{2.27}$$

iar vectorul moment cinetic este dat de egalitatea:

$$\vec{L}_0 = I\vec{\omega}. \tag{2.28}$$

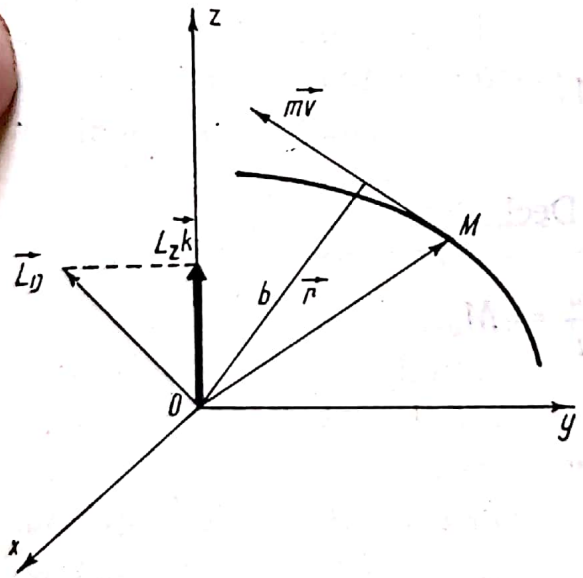


Fig. 2.24. În cazul mişcării circulare momentul cinetic este un vector perpendicular pe planul format de raza vectoare $\vec{r}$ şi $\vec{v}$ şi are sensul produsului vectorial:

$$\vec{L}_0(\vec{mv}) = \vec{r} \times \vec{mv}.$$

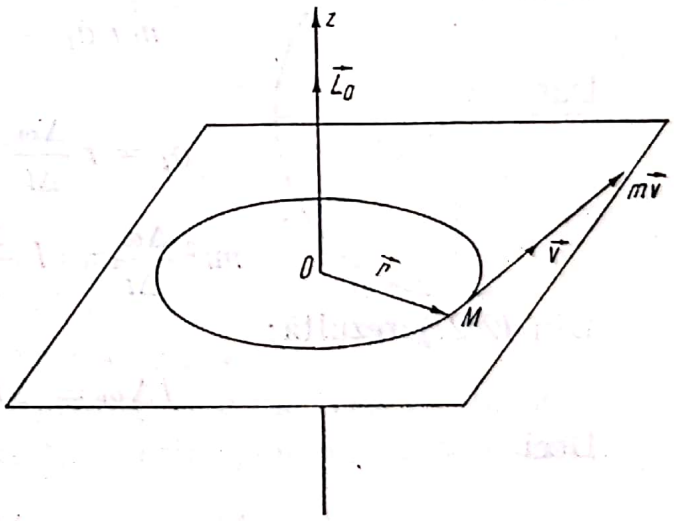


Fig. 2.25. Cînd mişcarea se face în planul Oxy, $\vec{L}_0$ are direcţia axei Oz.

Scanned with OKEN Scanner

Direcția momentului cinetic corespunde cu aceea a axei de rotație, iar sensul este dat de regula burghiului. Dimensiunile momentului cinetic sînt:

$$[L] = [m][v][r] = ML^2T^{-1} = \text{kg m}^2/\text{s}.$$

Fie un punct material care sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$ descrie o mișcare circulară. Momentul forței în raport cu centrul de rotație va fi:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Din ecuația de mișcare

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

se deduce

$$m\vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0.$$

Dar, descompunînd pe $\vec{a}$ în componentele $\vec{a}_t$ și $\vec{a}_n$, respectiv pe tangenta la cerc și pe rază, avem $\vec{r} \times \vec{a}_n = 0$ (fiind vectori paraleli), de unde

$$m\vec{r} \times \vec{a}_t = \vec{M}_0.$$

Rezultă că

$$m\, r\, a_t = M_0.$$

Dar

$$a_t = r\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \cdot \text{ Deci}$$

$$mr^2\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = M_0.$$

Din (2.27) rezultă:

$$I\Delta\omega = \Delta L_0.$$

Deci

$$\frac{\Delta L_0}{\Delta t} = M_0\ ;\ \frac{\Delta\vec{L}_0}{\Delta t} = \vec{M}_0. \qquad (2.29)$$

Am demonstrat că: *variația în unitatea de timp a momentului cinetic în raport cu un punct O este egală cu momentul forței care acționează asupra punctului material în raport cu același punct O.*

Scanned with OKEN Scanner

Probleme

1. Un inel cu masa m și raza R se rotește într-un plan orizontal în jurul unei axe verticale care trece prin centrul inelului. Inelul este făcut din sîrmă subțire, care are rezistența la rupere F. Cu ce viteză maximă se poate roti inelul, dacă coeficientul de siguranță trebuie să fie 3?

Răspuns: $\sqrt{\frac{F}{6\pi m R}}$.

2. De cîte ori crește viteza maximă admisibilă a unui biciclist pe un drum înclinat cu unghiul α față de orizontală în comparație cu viteza admisibilă pe un drum orizontal, dacă raza de curbură și coeficientul de frecare de alunecare au în ambele cazuri aceeași valoare?

Răspuns: $\sqrt{\frac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{\mu(1 - \mu \operatorname{tg}\alpha)}}$.

3. În interiorul unei rachete, care se ridică pe verticală cu accelerația $\vec{a}$, se află un vas în formă de con cu vîrful în jos, care conține un corp mic. Conul se rotește în jurul axei sale cu viteza unghiulară ω. La ce înălțime maximă față de vîrful conului se va afla corpul, dacă coeficientul de frecare dintre corp și suprafața conului este μ, iar unghiul de la vîrful conului este 2α. Axa conului coincide cu axa longitudinală a rachetei.

Răspuns: $\frac{(g + a)(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)}{\omega^2 \sin\alpha (\sin\alpha - \mu \cos\alpha)}$.

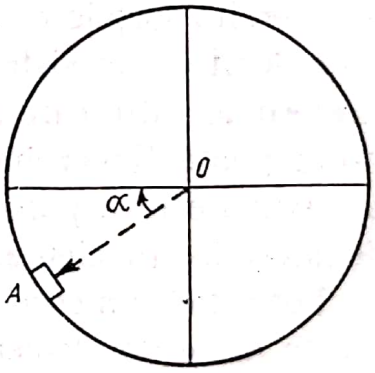


Fig. 2.26.

4. O sferă goală în interior cu raza R se rotește cu viteza unghiulară în jurul unei axe verticale (fig. 2.26). Să se determine coeficientul de frecare de alunecare minim pentru care un corp A nu alunecă pe suprafața sferei. Raza sferei care trece prin punctul A formează cu orizontala unghiul α.

Răspuns: $\mu = \frac{g \cos\alpha - 0{,}5\,\omega^2 R \sin 2\alpha}{g \sin\alpha + \omega^2 R \cos^2\alpha}$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

Dinamica sistemului mecanic

Pînă acum am studiat mecanica (cinematica, dinamica și statica) punctului material. Cele trei principii ale mecanicii (cele 3 legi ale lui Newton), formulate pentru punctul material, sînt suficiente, după cum vom vedea, pentru a construi dinamica corpurilor oarecare.

3.1. **Sistem mecanic.** Corpurile și sistemele de corpuri din natură pot fi descrise din p.d.v. mecanic, mai mult sau mai puțin exact, ca *sisteme de puncte materiale* între care se exercită anumite *forțe de interacțiune*. De exemplu, sistemul solar poate fi considerat în primă aproximație ca un sistem de puncte materiale (planetele și Soarele ale căror dimensiuni sînt mici în comparație cu distanțele reciproce) între care se exercită forțele de atracție gravitaționale. Un corp oarecare poate fi considerat ca un sistem de molecule (sau ioni) aproximate prin puncte materiale, între care se exercită forțe de atracție și de respingere. Un atom poate fi considerat ca sistem de particule (nucleu și electroni) aproximate prin puncte materiale, între care se exercită forțe electrice de atracție (nucleu-electroni) sau de respingere (electron-electron).

Tot astfel, un corp oarecare poate fi descompus mintal într-un număr foarte mare de elemente de volum foarte mici care pot fi aproximate prin puncte materiale, între care se exercită anumite forțe de interacțiune. Aproximația este oricît de precisă vrem dacă luăm aceste elemente de volum suficient de mici (la limită obținem o infinitate de elemente de volum infinit de mici).

Prin *sistem mecanic* vom înțelege un *sistem de puncte materiale*, care nu sînt independente între ele, ci supuse la legături reciproce (forțe de interacțiune), astfel încît formează un „întreg" mai mult sau mai puțin stabil, mai mult sau mai puțin deformabil.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul mecanic este un *model al realității* care reflectă mai mult sau mai puțin exact proprietățile mecanice ale corpurilor reale.

3.2. **Sistem.** Mai general, prin *sistem* (material) se înțelege orice porțiune din Univers, bine delimitată fie prin frontiere naturale, fie mintal, pe care o considerăm și o studiem la un moment dat.

Astfel, un sistem poate fi: o planetă, o piatră, o moleculă, un nucleu atomic, sistemul solar, un sistem de scripeți, o mașină, gazul dintr-un vas, radiația electromagnetică dintr-o incintă, o coloană de apă din ocean sau o coloană de aer din atmosferă etc.

3.3. **Forțe externe.** Odată sistemul ales și bine precizat, îndepărtăm mintal restul Universului și reprezentăm acțiunea sa prin *forțe* exercitate asupra sistemului, numite forțe externe. (Eliberarea de legături și înlocuirea acțiunii acestora prin forțe de reacțiune.)

Forțele externe sînt forțele exercitate asupra sistemului din partea corpurilor exterioare, care nu fac parte din sistemul considerat.

Conform principiului III al mecanicii la orice acțiune (forță) exterioară exercitată asupra unui punct material al sistemului îi corespunde o reacțiune, egală în modul și de sens contrar, exercitată de acest punct material asupra agentului exterior. Vom nota forțele externe cu litera F (eventual cu indici).

3.4. **Forțe interne.** Asupra fiecărei particule (punct material) din sistem se exercită atît forțe *externe* din partea corpurilor exterioare care nu fac parte din sistem, cît și forțe *interne* din partea tuturor celorlalte particule din sistem.

Forțele interne sînt forțele de interacțiune dintre punctele materiale ale sistemului considerat.

Vom nota forțele interne cu litera $\mathfrak{F}$ cursiv (cu indici).

Conform principiului III al mecanicii la orice acțiune $\vec{\mathfrak{F}}_{12}$ exercitată de o particulă m_2 asupra particulei m_1 îi corespunde o reacțiune $\vec{\mathfrak{F}}_{21}$, egală în modul și de sens opus, exercitată de particula m_1 asupra particulei m_2, $\vec{\mathfrak{F}}_{21} = -\vec{\mathfrak{F}}_{12}$ (fig. 3.1); linia de acțiune a acestor două forțe este dreapta care unește punctele m_1 și m_2. Prin urmare, forțele de interacțiune dintre oricare două particule (puncte materiale) ale sistemului sînt totdeauna perechi, două cîte două egale în modul și de sens opus.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă compunem aceste forțe (acțiunea și reacțiunea) două cîte două, obținem zero: $\vec{\mathfrak{F}}_{12} + \vec{\mathfrak{F}}_{21} = 0$.

Rezultanta tuturor forțelor interne ale unui sistem este nulă.

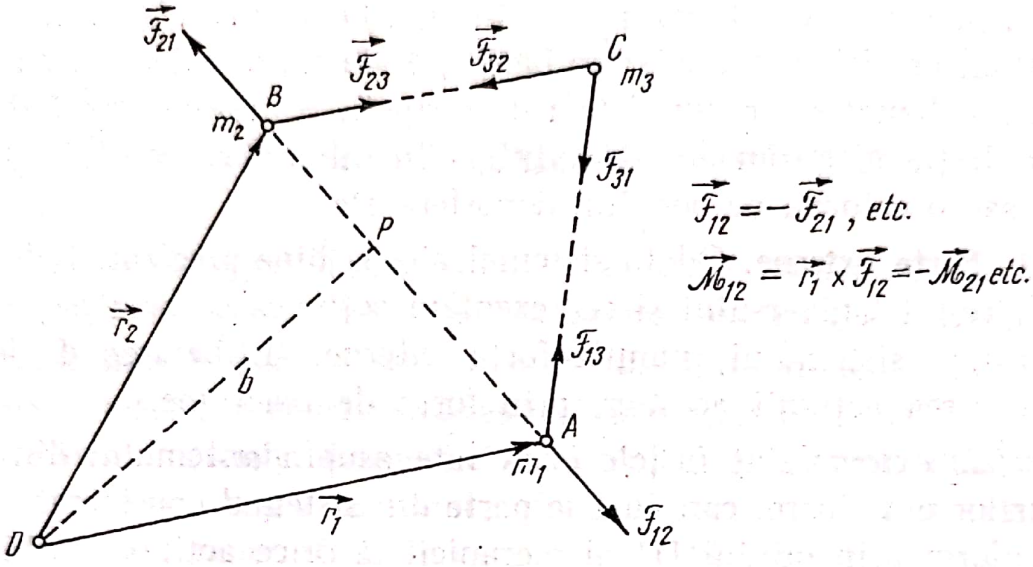


Fig. 3.1. Forțele interne care se exercită între punctele materiale ale unui sistem mecanic sînt două cîte două egale în modul și de sens opus (acțiunea și reacțiunea) $\vec{\mathfrak{F}}_{12} = -\vec{\mathfrak{F}}_{21}$ etc., de aceea rezultanta lor este nulă: $\vec{\mathfrak{F}}_{12} + \vec{\mathfrak{F}}_{21} = 0$ etc. De asemenea, momentele forțelor interne față de un punct dat sînt două cîte două egale în modul și de sens opus (momentul acțiunii și momentul reacțiunii): $\vec{\mathfrak{M}}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{\mathfrak{F}}_{12} = -\vec{r}_2 \times \vec{\mathfrak{F}}_{21} = -\vec{\mathfrak{M}}_{21}$, de aceea momentul rezultant al forțelor interne față de orice punct dat este nul: $\vec{\mathfrak{M}}_{12} + \vec{\mathfrak{M}}_{21} = 0$ etc.

Momentul forței $\vec{\mathfrak{F}}_{12}$ (al acțiunii) față de un punct (pol) dat O, $\vec{\mathfrak{M}}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{\mathfrak{F}}_{12}$, este egal în modul dar de sens opus cu momentul forței $\vec{\mathfrak{F}}_{21}$ (al reacțiunii) față de același pol O, $\vec{\mathfrak{M}}_{21} = \vec{r}_2 \times \vec{\mathfrak{F}}_{21} = -\vec{\mathfrak{M}}_{12}$ (fig. 3.1). În adevăr, modulul momentului este egal cu modulul forței înmulțit cu brațul forței (distanța de la pol pînă la dreapta suport a forței): $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cdot b$. Dar cele două forțe, acțiunea și reacțiunea, au același modul și același braț $b = OP$, fiindcă au aceeași dreaptă suport AB. Direcția celor două momente este de asemenea aceeași, fiind perpendiculară pe planul (O, AB), în schimb sensul acestor momente este opus, deoarece

cele două forțe sînt de sens opus, de aceea $\vec{\mathfrak{M}}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{\mathfrak{F}}_{12} = -\vec{r}_2 \times \vec{\mathfrak{F}}_{21} = -\vec{\mathfrak{M}}_{21}$ și deci $\vec{\mathfrak{M}}_{12} + \vec{\mathfrak{M}}_{12} = 0$.

Momentul rezultant al forțelor interne față de orice punct dat este nul.

Lucrul mecanic al forțelor interne nu este în general nul, fiind egal cu lucrul mecanic de deformare a sistemului.

3.5. **Solidul rigid.** Toate corpurile din natură sînt mai mult sau mai puțin deformabile. Nu există corpuri absolut rigide, absolut nedeformabile. Atunci cînd în problema considerată se pot neglija deformările corpului, obținem aproximația solidului rigid (nedeformabil).

Prin *solidul rigid* se înțelege un corp nedeformabil, ale cărui particule (elemente) sau părți nu se deplasează unele față de altele.

Modelul solidului rigid este un model al corpurilor reale, care reflectă mai mult sau mai puțin exact comportarea lor mecanică.

Lucrul mecanic al forțelor interne în cazul solidului rigid este nul.

În adevăr, lucrul mecanic este egal cu produsul scalar dintre vectorul forței și vectorul deplasare: $W = \vec{F}\vec{d} = Fd \cos(\vec{F}, \vec{d})$. Lucrul mecanic este nul dacă deplasarea se face perpendicular pe direcția forței. În cazul solidului rigid distanța AB dintre oricare două particule m_1 și m_2 este invariabilă. Considerînd mișcarea lor relativă, anume presupunînd pe una din ele, de exemplu pe m_2, fixă, cealaltă particulă m_1 nu poate decît să se rotească în jurul primei (fiind la distanță fixă de aceasta), deci are o deplasare perpendiculară pe forța $\vec{F}_{12}$ (acțiunea) exercitată asupra sa de m_2, și deci lucrul mecanic al acestei forțe este nul. Cum și lucrul mecanic al celeilalte forțe $\vec{F}_{21}$ (reacțiunea) este nul în mișcarea relativă considerată (m_2 fiind presupus fix), rezultă că lucrul mecanic al forțelor de interacțiune dintre oricare două particule ale solidului rigid este nul, oricare ar fi mișcarea acestuia.

3.6. **Impulsul total.** Fie $m_1, m_2, \ldots, m_N$ masele punctelor materiale ale sistemului, N — numărul lor total. În general notăm cu m_k masa unei particule oarecare, unde indicele k ia valorile $1,2,3,\ldots, N$. Asupra particulei (punctului material) m_k ($k = 1,2,\ldots,N$) se exercită forțe externe a căror rezultantă o notăm cu $\vec{F}_k$ și forțe interne a căror rezul-

Scanned with OKEN Scanner

tantă o notăm cu $\vec{\mathcal{F}}_k$ (de exemplu, $\vec{\mathcal{F}}_1 = \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{13} + \vec{\mathcal{F}}_{14} + \ldots + \vec{\mathcal{F}}_{1N}$).

Să scriem legea fundamentală a mecanicii pentru fiecare punct material al sistemului:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta(m_1\vec{v}_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = \vec{\mathcal{F}}_1 + \vec{F}_1, \quad (\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1),\\
&\frac{\Delta(m_2\vec{v}_2)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} = \vec{\mathcal{F}}_2 + \vec{F}_2, \quad (\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\Delta(m_N\vec{v}_N)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}_N}{\Delta t} = \vec{\mathcal{F}}_N + \vec{F}_N, \quad (\vec{p}_N = m_N\vec{v}_N),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

sau concentrat:

$$\frac{\Delta(m_k\vec{v}_k)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}_k}{\Delta t} = \vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k, \quad k = 1,2,3,\ldots,N. \tag{3.1'}$$

Impulsul total al sistemului este suma vectorială a impulsurilor tuturor punctelor materiale ale sistemului:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = \sum_{k=1}^{k=N}\vec{p}_k = \sum_{k=1}^{k=N} m_k\vec{v}_k. \tag{3.2}$$

Variaţia impulsului total este egală cu suma variaţiilor impulsurilor punctelor materiale ale sistemului:

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 + \ldots + \Delta\vec{p}_N = \sum_{k=1}^{k=N}\Delta\vec{p}_k. \tag{3.2'}$$

Notînd rezultanta tuturor forţelor externe exercitate asupra sistemului cu $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{k=1}^{k=N}\vec{F}_k \tag{3.3}$$

şi ţinînd seama că rezultanta tuturor forţelor interne ale sistemului este nulă:

$$\vec{\mathcal{F}}_1 + \vec{\mathcal{F}}_2 + \ldots + \vec{\mathcal{F}}_N = \sum_{k=1}^{k=N}\vec{\mathcal{F}}_k = 0, \tag{3.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

prin adunarea ecuațiilor (3.1) membru cu membru obținem

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \vec{F}\ ,\ (\vec{F}\,\Delta t = \Delta \vec{P}). \tag{3.5}$$

Variația impulsului total al sistemului raportată, la unitatea de timp, este egală cu rezultanta forțelor **externe** *aplicate sistemului*, Forțele interne nu pot produce o variație a impulsului total.

În ecuația (3.5) intervalul de timp Δt trebuie luat suficient de mic pentru ca $\vec{F}$ să reprezinte forța reală, momentană sau instantanee, care acționează în acel moment asupra sistemului, altfel $\vec{F}$ va reprezenta forța medie pe intervalul Δt, adică o forță constantă, echivalentă, care produce aceeași variație de impuls ca și forța reală, în același interval de timp Δt.

3.7. **Conservarea impulsului total.** Dacă rezultanta forțelor *externe* este *nulă*, atunci variația impulsului total este nulă, adică impulsul total al sistemului *se conservă*. Sistemul nu-și poate schimba impulsul său total decît sub acțiunea unei forțe rezultante *externe*, care de fapt *transmite* impuls din partea corpurilor exterioare cu care sistemul interacționează. În adevăr, mișcarea mecanică nu poate fi creată sau distrusă, ea se transmite de la un corp la altul în procesul interacțiunii prin intermediul forței. O măsură vectorială (spațială) a mișcării mecanice este impulsul. Astfel, impulsul forței rezultante aplicate ($\vec{F}\Delta t$) măsoară cantitatea de mișcare mecanică transmisă sistemului, care se regăsește în variația impulsului total ($\Delta \vec{P}$) al sistemului.

O aplicație importantă a legii de conservare a impulsului total al unui sistem se referă la *procesul de ciocnire*. În procesul de ciocnire se nasc forțe *interne* (acțiunea și reacțiunea) între corpurile care se ciocnesc. Aceste forțe durează, e drept, un timp foarte scurt, dar sînt mult mai mari decît forțele obișnuite exterioare care eventual se exercită asupra sistemului. De aceea în intervalul de timp foarte scurt cît durează ciocnirea, variația de impuls produsă de eventualele forțe exterioare se poate neglija în comparație cu variația de impuls a fiecărui corp produsă de forțele interne. De aceea *impulsul total al corpurilor care se ciocnesc, imediat înainte de ciocnire, este egal cu impulsul total al corpurilor imediat după ciocnire*, deoarece forțele interne ale unui sistem nu pot schimba

impulsul total al sistemului, iar eventualele forțe externe aplicate produc o variație de impuls neglijabilă în timpul foarte scurt cît durează ciocnirea.

3.8. **Momentul cinetic total.** După cum știm, variația momentului cinetic al unui punct material, raportată la unitatea de timp, este egală cu momentul forței rezultante în raport cu același pol dat. Să scriem această lege pentru fiecare punct material al sistemului:

$$\frac{\Delta \vec{L}_k}{\Delta t} = \vec{r}_k \times (\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k) = \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_k + \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{\mathfrak{M}}_k + \vec{M}_k,$$

$$\vec{L}_k = \vec{r}_k \times \vec{p}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k \ , \ k = 1,2,3,\ldots,N. \tag{3.6}$$

Ținînd seama că momentul rezultant al forțelor interne este nul, notînd cu $\vec{J}$ momentul cinetic rezultant (total) al sistemului și cu $\vec{M}$ momentul rezultant al forțelor externe:

$$\sum_k \vec{\mathfrak{M}}_k = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_k = 0 \ , \ M = \sum_k M_k = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k,$$

$$\vec{J} = \sum_k \vec{L}_k = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{p}_k = \sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k, \tag{3.7}$$

adunînd membru cu membru ecuațiile (3.6), obținem:

$$\frac{\Delta \vec{J}}{\Delta t} = \vec{M} \ , \ (\vec{M}\,\Delta t = \Delta \vec{J}). \tag{3.8}$$

Variația momentului cinetic total al unui sistem, raportată la unitatea de timp, este egală cu momentul rezultant al forțelor **externe** *față de același pol dat.* Forțele interne nu pot schimba momentul cinetic al sistemului. Cît timp momentul rezultant al forțelor externe este nul, momentul cinetic al sistemului (în raport cu același pol fix) se conservă.

Momentul cinetic este o măsură vectorială a mișcării. Impulsul momentului forțelor ($\vec{M}\Delta t$) măsoară mișcarea mecanică transmisă sistemului din partea corpurilor exterioare în procesul interacțiunii prin intermediul forțelor, și se regăsește în variația ($\Delta \vec{J}$) a momentului cinetic al sistemului.

În procesele de ciocnire momentul cinetic total al corpurilor care se ciocnesc se conservă, la fel ca și impulsul lor total.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema conservării momentului cinetic se aplică, de asemenea, în cazul mișcării planetelor în jurul Soarelui, al mișcării electronilor în jurul nucleului etc.

3.9. **Energia cinetică totală.** Variația energiei cinetice a unui punct material este egală cu lucrul mecanic al forțelor aplicate. Scriem această lege pentru fiecare punct material al sistemului:

$$\Delta\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right) = \mathcal{W}_k + W_k = \vec{\mathcal{F}}_k \Delta \vec{r}_k + \vec{F}_k \Delta \vec{r}_k, \quad k = 1,2,\ldots,N, \tag{3.9}$$

unde $\mathcal{W}_k$ este lucrul mecanic al forțelor interne exercitate asupra particulei m_k, iar W_k — lucrul mecanic al forțelor externe aplicate aceleiași particule. Însumînd membru cu membru ecuațiile (3.9), obținem

$$\Delta E_c = \mathcal{W} + W, \tag{3.10}$$

unde $E_c = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2$ este energia cinetică totală a sistemului,

$\mathcal{W} = \sum_k \vec{\mathcal{F}}_k \Delta \vec{r}_k$ este lucrul mecanic al forțelor interne,

$W = \sum_k \vec{F}_k \Delta \vec{r}_k$ este lucrul mecanic al forțelor externe.

Variația energiei cinetice a sistemului este egală cu lucrul mecanic atît al forțelor externe cît și al forțelor interne.

Pentru solidul rigid lucrul mecanic al forțelor interne este nul. În general însă, forțele interne efectuează un lucru mecanic (de deformare), producînd o variație corespunzătoare a energiei cinetice a sistemului. De exemplu, în cazul unei ciocniri mai mult sau mai puțin elastice, forțele interne efectuează un lucru mecanic nenul, producînd transformarea unei fracțiuni din energia cinetică a sistemului în alte forme nemecanice de energie (mai ales, căldură). La o explozie se creează energie cinetică pe seama energiei chimice. De aceea energia cinetică totală a corpurilor care se ciocnesc nu se conservă, în general, în procesul ciocnirii (afară de cazul ideal al ciocnirii perfect elastice), transformîndu-se parțial în alte forme de energie, nemecanice (căldură etc.).

Scanned with OKEN Scanner

3.10. **Mișcarea centrului de masă.** Centrul de masă (de inerție) a fost definit ca un punct geometric asociat sistemului al cărui vector de poziție este

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{k=N} m_k \vec{r}_k\,, \quad m = \sum_{k=1}^{k=N} m_k\,, \tag{3.11}$$

unde $\vec{r}_k$ ($k = 1,2,\ldots,N$) este vectorul de poziție al particulei m_k ($k = 1,2,\ldots,N$), iar m este masa totală a sistemului.

Să considerăm două configurații succesive ale sistemului, la un interval de timp foarte mic Δt, și să calculăm deplasarea corespunzătoare $\Delta\vec{r}_0$ a CM (= centrul de masă) (masele particulelor se consideră constante):

$$\Delta\vec{r}_0 = \vec{r}_{02} - \vec{r}_{01} = \frac{1}{m}\Sigma m_k \vec{r}_{k2} - \frac{1}{m}\Sigma m_k \vec{r}_{k1} = \frac{1}{m}\Sigma m_k \Delta\vec{r}_k.$$

Împărțind la intervalul de timp Δt, obținem vitezele respective:

$$\vec{v}_0 = \frac{\Delta\vec{r}_0}{\Delta t} = \frac{1}{m}\Sigma m_k \frac{\Delta\vec{r}_k}{\Delta t} = \frac{1}{m}\Sigma m_k \vec{v}_k$$

sau altfel

$$m\vec{v}_0 = \sum_k m_k \vec{v}_k = \sum_k \vec{p}_k = \vec{P}. \tag{3.12}$$

Impulsul total al sistemului este egal cu masa sistemului înmulțită cu viteza centrului de masă, ca și cum întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în CM și s-ar mișca cu viteza acestuia, adică sistemul s-ar reduce la un punct material situat în CM.

Să considerăm sistemul la două momente succesive separate printr-un interval de timp foarte scurt Δt și să calculăm variația vectorului viteză al CM:

$$\Delta\vec{v}_0 = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01} = \frac{1}{m}\vec{P}_2 - \frac{1}{m}\vec{P}_1 = \frac{1}{m}\Delta\vec{P}.$$

Împărțind la intervalul de timp Δt, obținem accelerația:

$$\vec{a}_0 = \frac{\Delta\vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{1}{m}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

Scanned with OKEN Scanner

și ținînd seama de ecuația fundamentală (3.5) obținem

$$m\vec{a}_0 = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \vec{F}. \qquad (3.13)$$

Rezultanta forțelor exterioare aplicate sistemului este egală cu masa sistemului înmulțită cu accelerația centrului de masă, ca și cum toată masa sistemului ar fi concentrată în CM și toate forțele ar fi aplicate acolo. CM se mișcă ca un punct material a cărui masă este egală cu masa sistemului și asupra căruia acționează forțele *externe*. Totodată impulsul acestui punct material este egal cu impulsul total al sistemului.

Prin urmare, *forțele interne nu pot schimba mișcarea centrului de masă*. Dacă rezultanta forțelor externe este nulă, accelerația centrului de masă va fi nulă și deci acesta va fi în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă.

Observații. a) Sistemul de referință inerțial dat, legat de Laboratorul în care se studiază fenomenul, se mai numește sistem de coordonate de laborator sau *sistemul laboratorului* (notat SL). Un sistem de coordonate cu originea în CM, care se mișcă prin *translație* față de SL (adică pozițiile succesive ale axelor de coordonate în timpul mișcării sînt paralele între ele), se numește *sistemul centrului de masă* (notat SCM). Centrul de masă este evident în repaus față de SCM (față de el însuși), adică viteza sa în SCM este nulă, de aceea impulsul sistemului în SCM este identic nul.

Se poate arăta că momentul cinetic total $\vec{J}$ al unui sistem se descompune într-o sumă vectorială din momentul cinetic *orbital* (sau extern) $\vec{L}$ al centrului de masă, în care ar fi concentrată totată masa sistemului, calculat față de SL, plus momentul cinetic *propriu* (sau intern, numit spin la particule elementare sau la nucleu) $\vec{S}$, calculat în SCM:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \text{ unde } \vec{L} = \vec{r}_0 \times \vec{P} = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0. \qquad (3.14)$$

La fel energia cinetică a sistemului se descompune în energia cinetică de *translație* a CM în care ar fi concentrată toată masa sistemului plus energia cinetică *relativă* calculată în SCM:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 + E_c' \quad \text{(teorema lui S. König)}. \qquad (3.15)$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema momentului cinetic total (3.8) și teorema energiei cinetice totale (3.9) sînt valabile și în SCM oricare ar fi mișcarea de translație a acestuia (adică a CM), deși inițial ele se demonstrează pentru SR inerțiale.

Prin urmare, mișcarea unui sistem se descompune în mișcarea de translație a CM, în care ar fi concentrată toată masa sistemului și în care s-ar aplica forțele externe, și într-o mișcare relativă față de CM (în SCM).

b) Pentru a afla o anumită forță internă trebuie să facem mintal o secțiune a sistemului în două subsisteme astfel ca forța internă de interacțiune (acțiunea și reacțiunea), care ne interesează, să devină *externă* pentru fiecare subsistem și apoi să studiem unul din subsisteme. Astfel se calculează tensiunile din fire sau bare care leagă corpurile dintr-un sistem.

3.11. **Exemple.** *a)* Fie o barcă ușoară din cauciuc, umflată cu aer, în repaus pe un lac. În barcă este așezată o greutate de plumb, de masă mult mai mare decît masa bărcii, astfel încît CM al sistemului (barcă + + greutatea de plumb) coincide practic cu CM al greutății de plumb.

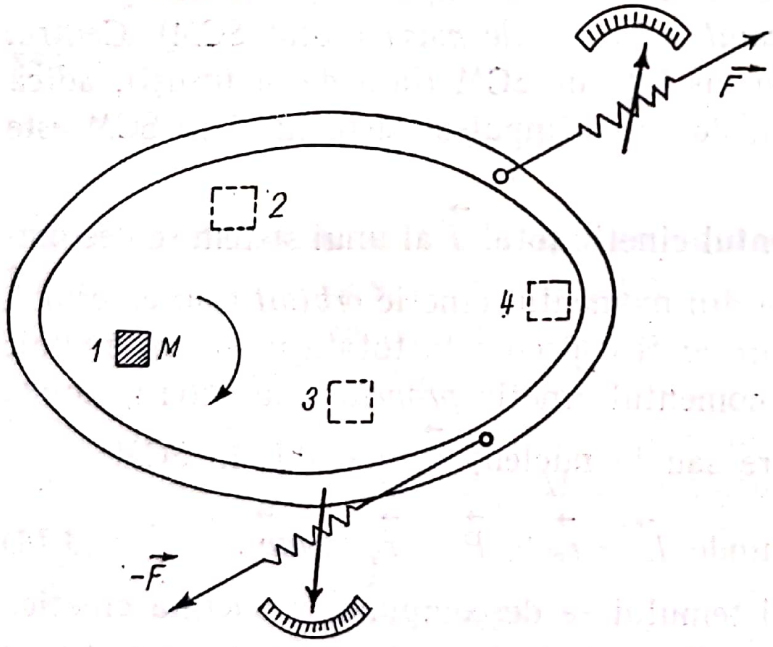


Fig. 3.2. Un cuplu de forțe (rezultantă nulă!) nu poate accelera centrul de masă. Barca se va roti în jurul unei axe trecînd prin centrul de masă.

Dacă acționăm asupra bărcii cu un *cuplu de forțe* ($\vec{F}$, $-\vec{F}$) în planul orizontal (fig. 3.2), se constată că barca se rotește totdeauna în jurul greutății de plumb, oriunde ar fi așezată aceasta în interiorul bărcii,

Scanned with OKEN Scanner

adică CM al sistemului rămîne pe loc. În adevăr, cuplul de forțe avînd *rezultantă nulă* nu poate mișca CM al sistemului.

b) Un obuz se mișcă liber în vid sub acțiunea greutății pe o parabolă. După explozie, CM al obuzului (al schijelor) se mișcă în continuare, neperturbat, ca și cum nimic nu s-a întîmplat, pe aceeași traiectorie,

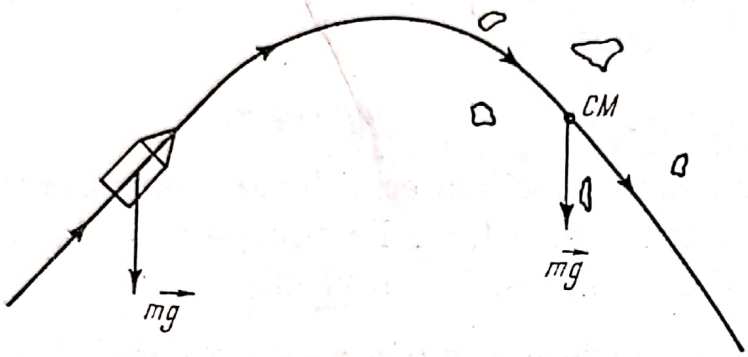


Fig. 3.3. Centrul de masă (CM) al obuzului se mișcă (în vid) pe o parabolă sub acțiunea greutății, chiar dacă obuzul explodează, deoarece forțele interne nu pot influența mișcarea CM al sistemului.

pînă cînd măcar o schijă atinge un obstacol (fig. 3.3). În adevăr, forțele interne care apar în procesul exploziei nu pot schimba mișcarea CM al sistemului.

c) Fie o sferă rigidă omogenă (sau un cilindru) care se rostogolește și în același timp *lunecă* în jos pe un plan înclinat (rigid). Fie α unghiul

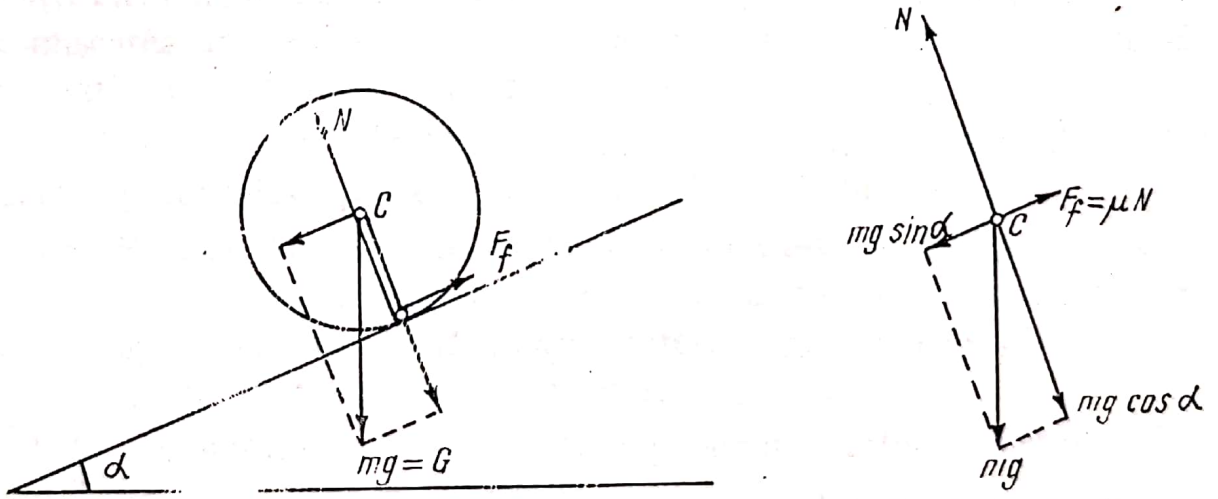


Fig. 3.4. Rostogolirea cu lunecare a unei sfere pe un plan înclinat. Accelerația centrului de masă este dată de rezultanta forțelor aplicate.

format de planul înclinat cu orizontala și μ coeficientul de frecare la lunecare dintre sferă și planul înclinat (fig. 3.4). În cazul lunecării forța de frecare $F_f = \mu N$, unde N este apăsarea normală exercitată asupra planului de lunecare.

Scanned with OKEN Scanner

Să calculăm accelerația cu care coboară CM al sferei. Pentru aceasta trebuie să aflăm rezultanta forțelor aplicate, ca și cum ar acționa în centrul C al sferei. Descompunem greutatea după direcțiile normală și paralelă la planul înclinat. Pe direcția normală punctul C nu se deplasează, adică componenta accelerației sale, normală pe planul înclinat, este nulă, deci suma proiecțiilor forțelor pe această direcție trebuie să fie nulă:

$$N - mg \cos \alpha = 0 \qquad \text{sau} \qquad N = mg \cos \alpha,$$

adică reacțiunea normală N a planului înclinat echilibrează componenta normală $mg \cos\alpha$ a greutății sferei (fig. 3.4, *b*). Pe direcția paralelă cu planul înclinat avem (sensul pozitiv în jos, în sensul mișcării):

$$mg \sin \alpha - \mu N = ma, \text{ de unde } a = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

exact ca la lunecarea unui corp fără rostogolire.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

Dinamica solidului rigid

În multe probleme de mecanică a corpurilor solide deformațiile acestora se pot neglija. Atunci obținem aproximația solidului rigid (nedeformabil). Modelul solidului rigid reflectă mai mult sau mai puțin exact proprietățile corpurilor reale, care sînt totdeauna deformabile.

4.1. **Translația.** Mișcarea de *translație* a corpului este acea mișcare în care orice dreaptă legată rigid de corp se mișcă *paralel* cu ea însăși, adică pozițiile succesive ale acestei drepte în timpul mișcării sînt paralele între ele. Toate punctele corpului au traiectorii, viteze și accelerații *identice*, de aceea mișcarea de translație este complet determinată de mișcarea unui *singur punct* arbitrar al corpului. Vectorul vitezei de translație poate fi considerat deci vector liber.

În mișcarea de translație forma traiectoriei, comună diferitelor puncte ale corpului, poate fi arbitrară, de exemplu circulară (fig. 4.1).

4.2. **Rotația.** Mișcarea de *rotație* a corpului este acea mișcare în care toate punctele corpului descriu *cercuri paralele* ale căror centre se găsesc pe o dreaptă, numită *axă de rotație*, viteza unghiulară de rotație fiind *aceeași* pentru toate punctele corpului.

Viteza unghiulară ω se reprezintă printr-un vector alunecător (glisant) $\vec{\omega}$ situat pe axa de rotație (fig. 4.2). Alegînd pe axă un punct arbitrar O și ducînd vectorul de poziție $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ al unui punct oarecare P al corpului, putem scrie viteza acestuia $\vec{v}$ sub forma produsului vectorial:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad r \sin \alpha = R, \; v = \omega R, \; \omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \qquad (4.1)$$

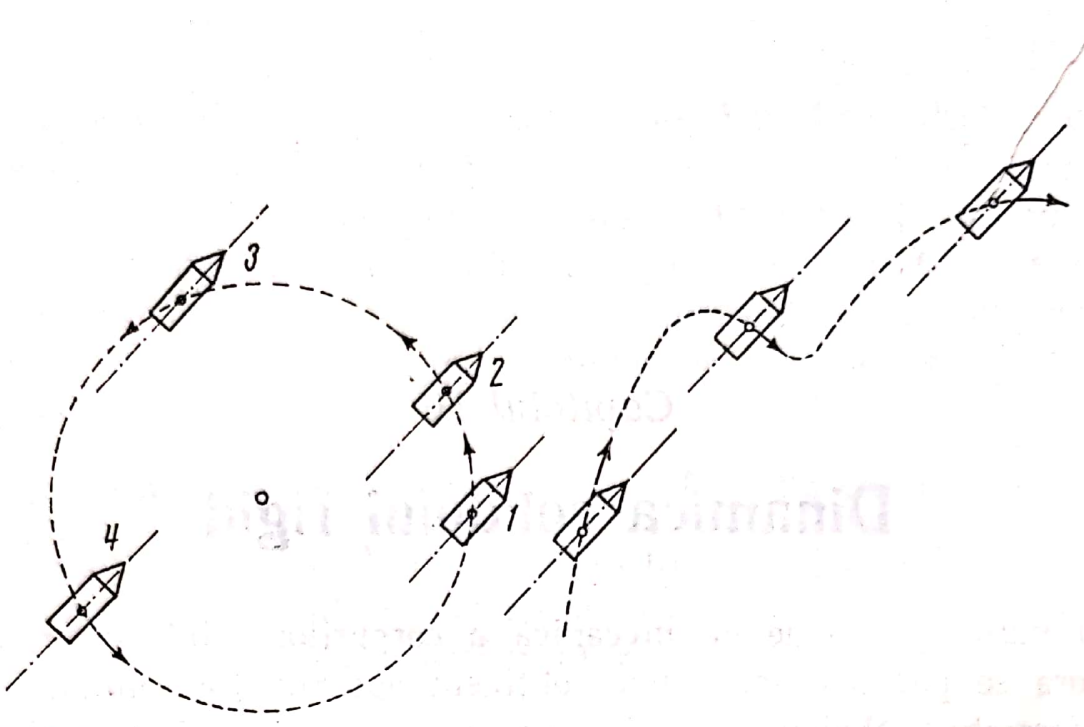


Fig. 4.1. În mișcarea de translație traiectoriile, vitezele și accelerațiile tuturor punctelor corpului sînt identice; orice dreaptă care unește două puncte ale corpului, deci legată rigid de corp, ocupă poziții paralele între ele în timpul mișcării. Forma traiectoriei poate fi oricare.

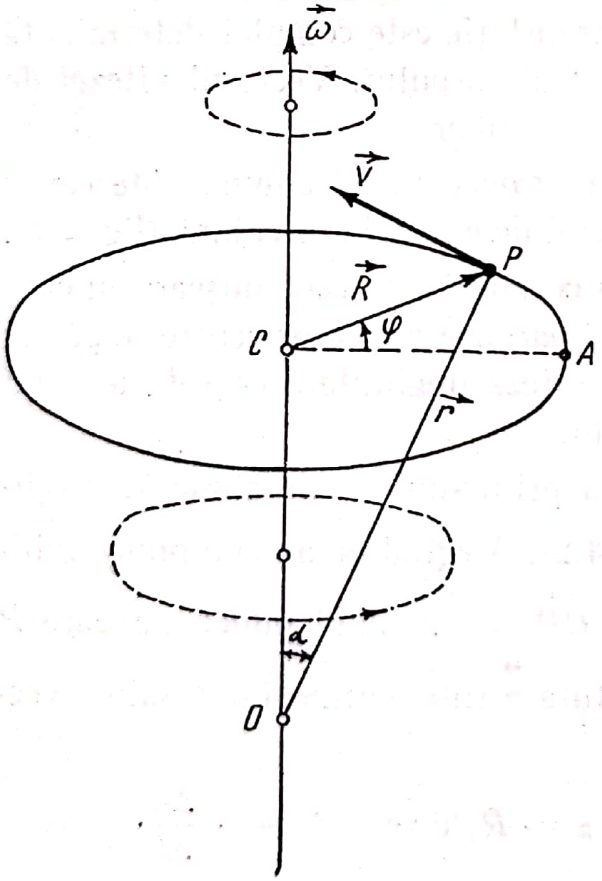


Fig. 4.2. În mișcarea de rotație toate punctele descriu cercuri paralele cu aceeași viteză unghiulară ω. Viteza unui punct oarecare se exprimă prin produsul vectorial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

În general mișcarea de rotație poate fi neuniformă și însăși axa de rotație se poate schimba cu timpul. O măsură a acestei neuniformități a rotației este vectorul accelerației unghiulare:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}. \tag{4.2}$$

Dacă $\vec{\omega}$ variază numai în modul (de exemplu, axă de rotație fixă), vectorul $\vec{\varepsilon}$ va fi paralel cu $\vec{\omega}$.

Observație. Mișcarea arbitrară a solidului rigid se poate descompune în fiecare moment într-o translație și o rotație. Anume, alegînd un punct arbitrar al rigidului drept punct de reducere, numit *pol*, vitezele tuturor punctelor solidului se descompun în fiecare moment într-o viteză de translație, comună tuturor punctelor și egală cu viteza polului, plus o viteză de rotație momentană sau instantanee în jurul unei axe trecînd prin pol. În adevăr, în SR (=sistemul de referință) mișcat cu viteza polului, solidul nu poate avea decît o rotație relativă în jurul polului care este fix. Prin urmare vitezele absolute (totale) sînt egale cu viteza de transport (de translație) a polului plus vitezele relative de rotație în jurul polului.

Viteza de translație este viteza polului ales, în timp ce viteza unghiulară de rotație nu depinde de alegerea polului (vectorul $\vec{\omega}$ se deplasează prin translație, echipolent, în noul pol).

Printr-o alegere adecvată a polului putem reprezenta mișcarea arbitrară a rigidului ca o *mișcare elicoidală* (momentană sau instantanee), în general neuniformă, în care translația se face în direcția axei de rotație, ca la mișcarea de înaintare (rotație și translație) a unui șurub într-o piuliță (teorema lui Chasles).

Dacă solidul are la un moment dat o mișcare relativă de translație și rotație, în raport cu un SR „mobil", care la rîndul său are o mișcare de transport (de antrenare), de translație și rotație, față de un SR considerat fix (absolut), atunci translația și rotația momentane, „absolute", față de SR fix, se obțin prin *compunerea vectorială a translațiilor* (ca vectori liberi) *și a rotațiilor* (ca vectori *alunecători*, de aceea axele de rotație trebuie făcute în prealabil *concurente* printr-o alegere adecvată a polilor).

4.3. **Energia cinetică de rotație.** Fie un solid care se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe fixe. Să calculăm energia cinetică a punctelor sale. Un punct material de masă m aflat la distanța R de axa de rotație are viteza $v = \omega R$ și energia cinetică $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mR^2\omega^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Energia cinetică totală a solidului în rotație se obține prin însumare (ω este același pentru toate punctele solidului):

$$E_{rot} = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{1}{2} m_k R_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 , \tag{4.3}$$

unde mărimea

$$I = \sum_{k=1}^{k=N} m_k R_k^2 \tag{4.4}$$

se numește *moment de inerție* al corpului față de axa considerată. *Atenție:* R — distanțele pînă la axă, r — distanțele pînă la origine sau pol.

Momentul de inerție este egal cu suma momentelor de inerție ale particulelor componente ale corpului (fig. 4.3). Momentul de inerție al unui punct material față de o axă este egal cu produsul dintre masa punctului material și pătratul distanței sale pînă la axă: mR^2.

Energia cinetică de rotație este cu atît mai mare (pentru ω dat) cu cît particulele sînt distribuite la distanțe mai mari de axa de rotație (deoarece $v = \omega R$), deci cu cît momentul de inerție este mai mare.

Alegînd polul în CM, descompunerea energiei cinetice totale a solidului (3.15) devine

$$E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = E_{tr} + E_{rot} . \tag{4.5}$$

Energia cinetică a unui solid este egală cu energia cinetică de translație a CM în care ar fi concentrată toată masa corpului (ca un punct material) plus energia cinetică de rotație în jurul unei axe trecînd prin CM. Subliniem că descompunerea (4.5) este valabilă numai în raport cu centrul de masă.

4.4. **Momentul de inerție.** Unitatea de măsură pentru momentul de inerție rezultă imediat din definiție:

$$[I] = [m][R^2] = \mathrm{ML}^2 = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \text{ în unitățile SI.} \tag{4.6}$$

Comparînd expresiile energiilor cinetice, de rotație $\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right)$ și de translație $\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$, și ținînd seama că vitezei de translație v (aceeași pentru toate punctele corpului) din mișcarea de translație îi corespunde viteza unghiulară ω (aceeași pentru toate punctele corpului) din miș-

Scanned with OKEN Scanner

carea de rotaţie, se vede că masei m din mişcarea de translaţie îi corespunde momentul de inerţie I în mişcarea de rotaţie.

Aşa cum masa unui corp este o măsură a inerţiei sale în mişcarea de translaţie, tot astfel *momentul de inerţie faţă de o axă este o măsură a inerţiei corpului în mişcarea de rotaţie în jurul acelei axe.*

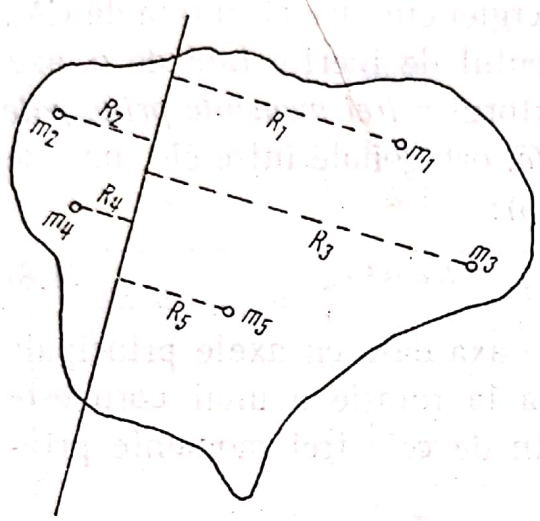


Fig. 4.3. Momentul de inerţie al unui corp faţă de o axă este egal cu suma momentelor de inerţie ale particulelor sale faţă de acea axă: $I = \sum_k m_k R_k^2$.

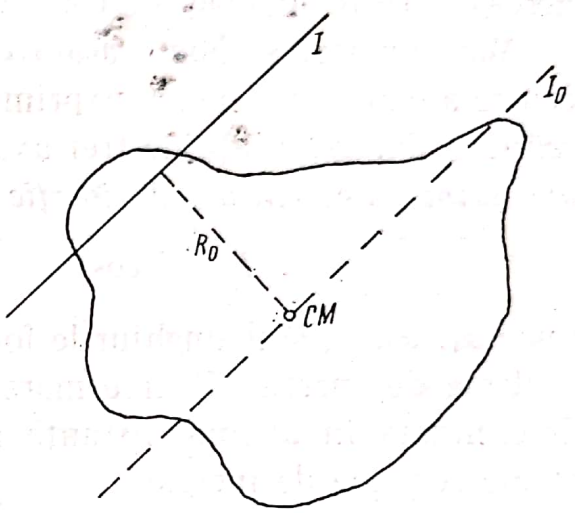


Fig. 4.4. Momentul de inerţie al unui corp faţă de o axă oarecare, I, este egal cu momentul de inerţie al CM faţă de acea axă, anume mR_0^2 (momentul de inerţie orbital) plus momentul de inerţie I_0 faţă de o axă paralelă centrală (momentul de inerţie propriu): $I = mR_0^2 + I_0$ (teorema lui Steiner).

Valoarea momentului de inerţie depinde nu numai de mărimea maselor particulelor corpului, ci şi de distribuţia (distanţele) lor faţă de axa de rotaţie. La o aceeaşi masă totală, corpul care are masele mai *depărtate* de axă va avea un moment de inerţie mai mare, de exemplu, momentul de inerţie al unui inel (cilindru gol) este mai mare decît al unui disc (sau cilindru) omogen de aceeaşi masă, faţă de axa lor de simetrie. Pentru a obţine un moment de inerţie cît mai mare materialul trebuie distribuit cît mai departe de axa de rotaţie.

Momentul de inerţie al unui corp depinde de axa faţă de care se calculează, de aceea nu este o mărime scalară şi nici vectorială, ci una mai complexă (tensorială).

Momentul de inerţie faţă de o axă arbitrară este egal cu momentul de inerţie faţă de o axă *paralelă* cu cea dată dar trecînd prin centrul

Scanned with OKEN Scanner

de masă (axă centrală) plus momentul de inerție al corpului presupus redus la un punct material în CM față de axa dată (teorema lui Steiner):

$$I = I_0 + mR_0^2, \tag{4.7}$$

unde R_0 este distanța CM pînă la axa dată (fig. 4.4). Descompunerea (4.7) este analoagă descompunerii energiei cinetice (4.5) față de CM.

Mai departe, se poate arăta că momentul de inerție față de o axă centrală oarecare se poate exprima cu ajutorul a *trei momente principale centrale de inerție* față de trei axe *anumite*, ortogonale între ele, numite *axe principale centrale de inerție* (fig. 4.5):

$$I = I_1\cos^2\alpha_1 + I_2\cos^2\alpha_2 + I_3\cos^2\alpha_3, \tag{4.8}$$

unde α_1, α_2, α_3 sînt unghiurile formate de axa dată cu axele principale centrale de inerție. Prin urmare, inerția la rotație a unui corp este determinată în ultima instanță pe deplin de cele trei momente principale centrale de inerție.

La corpurile omogene de formă geometrică regulată momentele de inerție pot fi calculate ușor (cu ajutorul calculului integral). În cazul corpurilor oarecare momentele de inerție se determină experimental. Dacă un corp omogen posedă o axă de simetrie, acea axă va fi una din

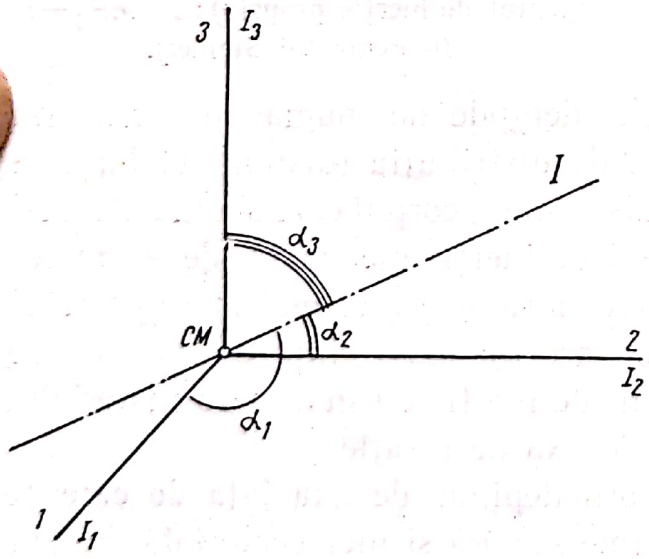


Fig. 4.5. Momentul de inerție față de o axă centrală oarecare se exprimă cu ajutorul celor trei momente de inerție principale centrale: $I = I_1\cos^2\alpha_1 + I_2\cos^2\alpha_2 + I_3\cos^2\alpha_3$.

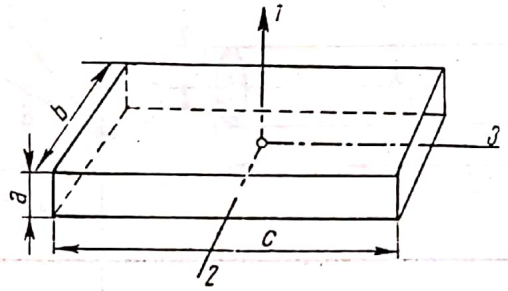
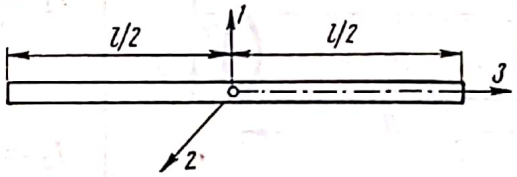
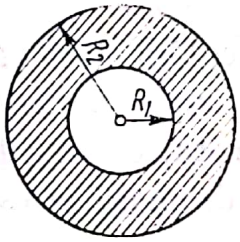
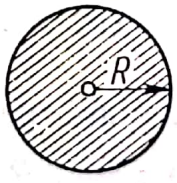
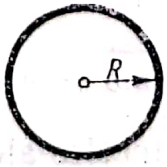
cele trei axe principale centrale de inerție. Două (la cilindru omogen) sau toate trei (la sferă omogenă) momente principale centrale de inerție

Scanned with OKEN Scanner

pot fi egale între ele. La o sferă omogenă orice diametru este axă principală centrală de inerţie.

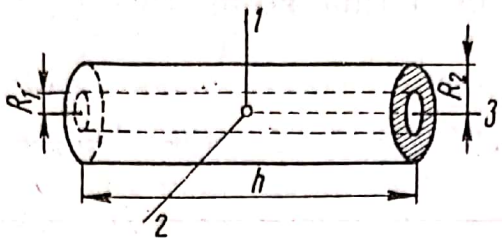
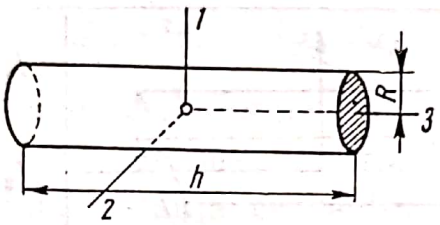
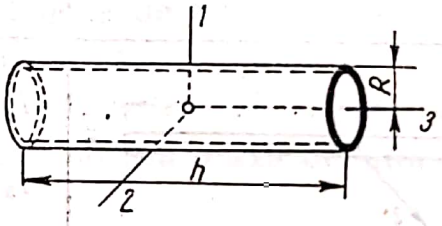
În tabelă se dau momentele principale centrale de inerţie pentru cîteva corpuri omogene de formă geometrică regulată.

Momentele de inerţie ale cîtorva corpuri

Corpul	Axele principale centrale de inerţie	Momentele principale centrale de inerţie
1. Paralelipiped		$I_1 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$, $I_2 = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2)$, $I_3 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$.
2. Tijă subţire		$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} ml^2$, $I_3 = 0$.
3. Sfera goală (pătură sferică)		$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} m \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}$
4. Sferă (plină)		$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} mR^2$
5. Pătură sferică subţire		$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3} mR^2$

Scanned with OKEN Scanner

(continuare)

Corpul	Axele principale centrale de inerție	Momentele principale centrale de inerție
6. Cilindru gol (pătură cilindrică)		$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} m(R_1^2 + R_2^2 + \frac{1}{3} h^2)$, $I_3 = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$
7. Cilindru (plin)		$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} m\left(R^2 + \frac{1}{3} h^2\right)$, $I_3 = \frac{1}{2} mR^2$
8. Pătură cilindrică subțire		$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} m\left(R^2 + \frac{1}{6} h^2\right)$, $I_3 = mR^2$

4.5. **Momentul cinetic.** Să calculăm *momentul cinetic în raport cu axa* al unui corp în rotație, adică *proiecția momentului cinetic pe axa de rotație*. Alegem polul pe axa de rotație (fig. 4.6). Momentul cinetic al unui punct material oarecare P de masă m este

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{mv} = (\vec{OC} + \vec{R}) \times \vec{mv} = \vec{OC} \times \vec{mv} + \vec{R} \times \vec{mv} = \vec{L}_\perp + \vec{L}_\parallel$$

unde $\vec{L}_\perp$ este componenta perpendiculară pe axa de rotație, iar $\vec{L}_\parallel$ — componenta paralelă. Deoarece $v = \omega R$ și $\sin(\vec{R}, \vec{v}) = 1$, obținem în mărime, direcție și sens:

$$\vec{L}_\parallel = \vec{R} \times \vec{mv} = mR^2\vec{\omega}. \qquad (4.9)$$

Însumînd proiecțiile momentelor cinetice ale tuturor particulelor corpu-

Scanned with OKEN Scanner

lui, obţinem componenta momentului cinetic total pe axa de rotaţie, respectiv proiecţia sa (momentul cinetic în raport cu axa):

$$\vec{J}_{\parallel} = \sum_{k=1}^{k=N} m_k R_k^2 \vec{\omega} = I\vec{\omega}, \quad J_{\parallel} = I\omega. \tag{4.10}$$

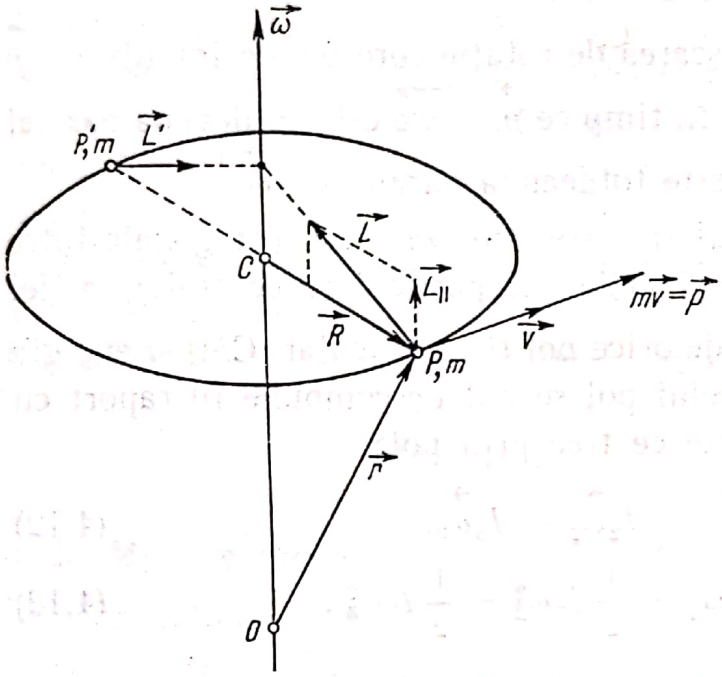


Fig. 4.6. Proiecţia momentului cinetic al unui punct material pe axa de rotaţie (momentul cinetic în raport cu axa) este $L_{\parallel} = mR^2\omega$, unde R este distanţa punctului pînă la axă. Prin însumare obţinem proiecţia momentului cinetic total al corpului $J_{\parallel} = \Sigma m_k R_k^2\, \omega = I\, \omega$ (polul este pe axa de rotaţie).

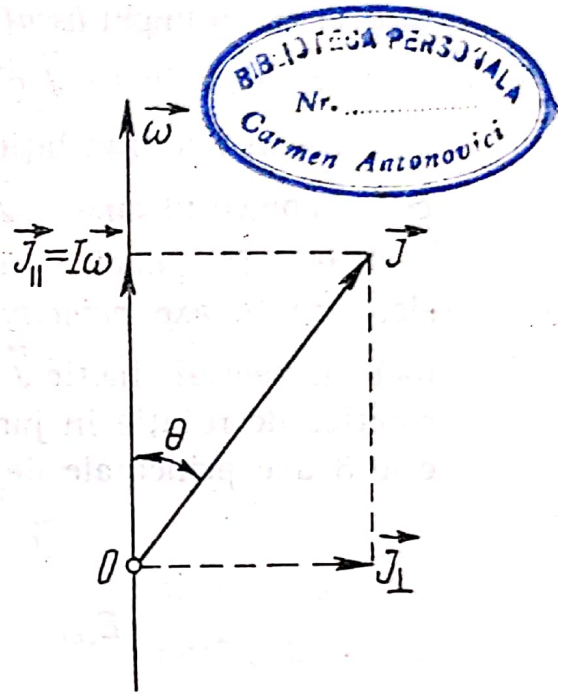


Fig. 4.7. Vectorul moment cinetic $\vec{J}$ (faţă de un punct de pe axa de rotaţie) nu este în general paralel cu vectorul vitezei unghiulare $\vec{\omega}$. Componenta sa pe axa de rotaţie este $\vec{J}_{\parallel} = I\,\vec{\omega}$, ($J_{\parallel} = J\cos\theta$), unde I este momentul de inerţie faţă de axă.

BIBLIOTECA PERSONALA
Nr. .....
Carmen Antonovici

Componenta momentului cinetic pe axa de rotaţie este egală cu momentul de inerţie faţă de acea axă înmulţit cu vectorul viteză unghiulară.

Să arătăm că energia cinetică de rotaţie (4.3) se exprimă prin momentul cinetic sub forma produsului scalar:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{J}\,\vec{\omega}. \tag{4.11}$$

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr (fig. 4.7),

$$\frac{1}{2}\vec{J}\vec{\omega} = \frac{1}{2}J\omega\cos\theta = \frac{1}{2}J_{\parallel}\omega = \frac{1}{2}I\omega^2 = E_{\text{rot}}.$$

Deoarece $E_{\text{rot}} > 0$, rezultă $\cos\theta > 0$, $0 \leqslant \theta < \pi/2$, adică $\vec{J}$ formează totdeauna un unghi *ascuțit* cu axa de rotație.

Momentul cinetic $\vec{J}$ din mișcarea de rotație corespunde impulsului $\vec{p}$ din mișcarea de translație, dar în timp ce $\vec{p} = \overrightarrow{mv}$ este totdeauna paralel cu $\vec{v}$, momentul cinetic $\vec{J}$ nu este totdeauna paralel cu $\vec{\omega}$.

Prin orice punct al corpului trec trei axe *anumite*, ortogonale între ele, numite axe *principale* de inerție (în particular, centrale), astfel încît momentul cinetic $\vec{J}$ față de orice pol (în particular, CM) și energia cinetică de rotație în jurul acelui pol se pot descompune în raport cu cele 3 axe principale de inerție ce trec prin pol:

$$\vec{J} = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 + I_3\vec{\omega}_3, \tag{4.12}$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2, \tag{4.13}$$

unde I_1, I_2, I_3 sînt momentele de inerție principale, iar ω_1, ω_2, ω_3 componentele vitezei unghiulare față de axele principale.

Dacă axa de rotație este o axă *principală* de inerție, atunci din (4.12) se vede că momentul cinetic $\vec{J}$ va fi paralel cu axa de rotație $\vec{\omega}$. De exemplu, în particular, în cazul unei *axe de simetrie* a unui corp omogen, fiecărui punct material P îi corespunde un punct material identic P' situat simetric (diametral opus) în raport cu axa de rotație (de simetrie) (fig. 4.6). Componentele paralele $\vec{L}_{\parallel}$ ale acestor două puncte sînt identice și se adună, în timp ce componentele transversale (perpendiculare pe axă) $\vec{L}_{\perp}$ sînt egale în modul și de sens opus (vitezele celor două puncte sînt de sens opus) și dau rezultantă nulă. Prin urmare, momentul cinetic rezultant, total, al corpului va fi în acest caz paralel cu axa de rotație.

4.6. **Legea inerției.** Dacă solidul rigid este izolat (sau forța rezultantă și momentul rezultant sînt nule), atunci momentul cinetic $\vec{J}$ se

Scanned with OKEN Scanner

conservă (§ 3.8). Cum în acest caz CM este în repaus sau se mișcă rectiliniu uniform (rezultantă nulă!, § 3.10), rezultă că momentul cinetic orbital $\vec{L} = \vec{r}_0 \times \overrightarrow{mv_0}$ se conservă, deci și momentul cinetic propriu $\vec{S}$ se conservă, deoarece $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Dacă acum axa de rotație este o axă *principală centrală* (de exemplu, axă de simetrie a unui corp omogen), atunci $\vec{S} = I\vec{\omega}$, deci și vectorul vitezei unghiulare $\vec{\omega}$ se va conserva. Prin urmare, în aceste condiții, CM al rigidului este în repaus sau se mișcă rectiliniu uniform și în același timp *rigidul se rotește la nesfîrșit, în mod uniform (cu viteză unghiulară constantă), în jurul axei sale principale centrale*. Aceasta este *legea inerției* pentru mișcarea de translație și de *rotație* a solidului rigid.

4.7. **Legea fundamentală.** Să considerăm acum mișcarea de rotație a unui solid rigid în jurul unei *axe fixe*. Scriind proiecția ecuației fundamentale (3.8) pe axa de rotație, obținem

$$\frac{\Delta \vec{J}}{\Delta t} = \vec{M} \longrightarrow \frac{\Delta J_{\parallel}}{\Delta t} = M_{\parallel},$$

unde $M_{\parallel}$ este proiecția pe axa de rotație a momentului rezultant al forțelor aplicate corpului. Alegînd polul față de care calculăm $\vec{J}$ și $\vec{M}$ pe axa de rotație, avem $J_{\parallel} = I\omega$, deci

$$\frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t} = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = I\varepsilon = M_{\parallel}, \qquad (4.14)$$

unde $M_{\parallel}$ este momentul forțelor în raport cu axa de rotație. Aceasta este ecuația fundamentală pentru mișcarea de rotație a rigidului în jurul unei axe fixe:

Momentul în raport cu axa de rotație al forțelor aplicate rigidului este egal cu momentul de inerție al rigidului față de axă înmulțit cu accelerația unghiulară. Accelerația unghiulară este direct proporțională cu momentul forțelor în raport cu axa de rotație și invers proporțională cu momentul de inerție al corpului față de axa de rotație.

Dacă $M_{\parallel} \equiv 0$, rezultă $\varepsilon = 0$, deci $\omega = \text{const.}$, adică rigidul se va roti uniform în jurul axei fixe.

Ecuația (4.14) este analoagă legii $F_t = ma_t$ din mișcarea de translație, unde F_t este componenta tangențială a forței (tangentă la tra

Scanned with OKEN Scanner

iectorie sau paralelă cu viteza $\vec{v}$), analoagă lui $M_{||}$ care este paralel cu $\vec{\omega}$, iar a_t — acceleraţia tangenţială analogă lui ε (care aici este paralel cu $\vec{\omega}$).

4.8. **Puterea şi lucrul mecanic.** Să calculăm puterea dezvoltată de forţele aplicate rigidului în rotaţie (forţele interne nu efectuează lucru mecanic la solidul rigid). Considerăm întîi o singură particulă m sub acţiunea forţei $\vec{F}$. Descompunem forţa $\vec{F}$ într-o componentă $\vec{F}_{||}$ paralelă cu axa de rotaţie şi o componentă $\vec{F}_{\perp}$ perpendiculară pe axă. Componenta $\vec{F}_{||}$ fiind perpendiculară pe viteza particulei, care descrie un cerc în jurul axei, dă putere nulă ($\cos \pi/2 = 0$) (fig. 4.8):

$$P = \vec{F}\vec{v} = (\vec{F}_{||} + \vec{F}_{\perp})\vec{v} = \vec{F}_{\perp}\vec{v} = F_{\perp} v \cos\alpha = F_{\perp}\omega R \cos\alpha =$$

$$= F_{\perp}\omega b = M_{||}\omega = \vec{M}_{||}\vec{\omega} = \vec{M}\vec{\omega},$$

unde $R \cos\alpha = b$ este braţul forţei $\vec{F}_{\perp}$ şi $F_{\perp} \cdot b = M_{||}$ — momentul în raport cu axa. Însumînd pentru toate punctele materiale ale corpului (ω este acelaşi), obţinem puterea totală:

$$P = \sum_{k=1}^{k=N} \vec{F}_k\vec{v}_k = \sum \vec{M}_k\vec{\omega} = \vec{M}\vec{\omega}, \qquad (4.15)$$

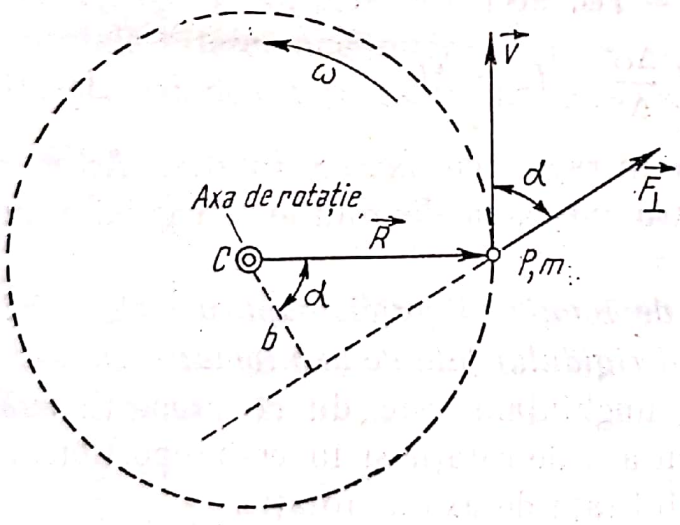


Fig. 4.8. Puterea dezvoltată de forţele aplicate rigidului în rotaţie este dată de produsul scalar $P = \vec{M}\vec{\omega}$, unde $\vec{M}$ este momentul forţelor faţă de un punct situat pe axa de rotaţie.

unde M este momentul total al forţelor faţă de un punct de pe axa de rotaţie. Formula obţinută este analoagă celei de la mişcarea de translaţie ($P = \vec{F}\vec{v}$), după cum era de aşteptat.

Scanned with OKEN Scanner

Lucrul mecanic efectuat într-un timp Δt este

$$W = P\Delta t = M_{||}\omega\Delta t = M_{||}\Delta\varphi, \quad (\Delta\varphi = \omega\Delta t). \tag{4.16}$$

Dacă $M_{||}$ nu este constant, trebuie luată o valoare medie pe intervalul $\Delta\varphi$ sau însumate produsele $M_{||}\,\Delta\varphi$ pentru intervalele mici succesive $\Delta\varphi$ cu $M_{||}$ corespunzător fiecărui interval.

Aplicînd (3.9) rotației solidului rigid, obținem

$$\Delta E_{rot} = \Delta\left(\frac{1}{2} I\omega^2\right) = \vec{M}\vec{\omega}\Delta t. \tag{4.17}$$

În cazul general al mișcării de translație și de rotație *în raport cu CM*, obținem:

$$W = \vec{F}\vec{v}_0\Delta t + \vec{M}\vec{\omega}\Delta t = \Delta\left(\frac{1}{2} mv_0^2\right) + \Delta\left(\frac{1}{2} I\omega^2\right) = \Delta E_{\text{tr}} + \Delta E_{\text{rot}}, \tag{4.18}$$

unde v_0 este viteza CM, I — momentul de inerție față de axa de rotație centrală. *Lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare aplicate rigidului este egal cu variația energiei cinetice totale: de translație* (a CM) *și de rotație* (în jurul CM).

Legile mișcării de rotație explică funcționarea volanților. *Volantul* este o roată (disc) cu *moment de inerție mare*, care posedă deci un moment cinetic mare și o energie cinetică de rotație mare. Volantul servește pentru uniformizarea mișcării de rotație a mașinilor. În adevăr, la mașinile cu abur sau cu explozie forțele dezvoltate nu sînt constante și nu efectuează uniform lucru mecanic, de aceea mișcarea pistonului n-ar da o mișcare de rotație uniformă. Fixînd pe arborele motor un volant, acesta joacă rolul unui rezervor de energie cinetică care compensează variațiile lucrului mecanic produs de motor, astfel încît variațiile turației vor fi mici (fiind invers proporționale cu momentul de inerție al volantului). Rolul volantului poate fi îndeplinit și de rotoarele turbinelor sau al motoarelor electrice.

4.9. **Conservarea momentului cinetic.** Fie mai multe corpuri care se rotesc în jurul unei axe fixe comune, cu vitezele unghiulare ω_1, ω_2,..., avînd momentele de inerție I_1, I_2, ... față de această axă. Dacă momentul forțelor în raport cu axa de rotație este nul, proiecția momentului cinetic total pe axa de rotație se va conserva chiar dacă între corpurile

Scanned with OKEN Scanner

sistemului intervine la un moment dat o interacțiune care modifică distribuția corpurilor față de axa de rotație, deci modifică momentele lor de inerție:

$$J_{||} = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + \ldots = I_1'\omega_1' + I_2'\omega_2' + \ldots = \text{const}, \qquad (4.19)$$

unde I_1', I_2', ... și ω'_1, ω'_2,... sînt momentele de inerție și vitezele unghiulare după interacțiune. În particular putem avea un singur corp care la un moment dat își schimbă (prin forțe interne) momentul său de inerție I în I' și viteza unghiulară ω în ω'. Atunci produsul $I\omega$ va rămîne neschimbat:

$$J_{||} = I\omega = I'\omega'. \qquad (4.20)$$

Conservarea momentului cinetic se poate demonstra ușor cu ajutorul scaunului lui Jukowski — o platformă rotundă orizontală care se poate roti ușor pe rulmenți în jurul axei sale verticale fixe de simetrie. Un om situat pe platformă și ținînd greutăți în mîinile depărtate lateral este adus în mișcare de rotație împreună cu platforma cu o anumită viteză unghiulară ω. Deoarece forțele exterioare nu dau moment în raport cu axa de rotație (fiind paralele sau concurente cu axa; neglijăm momentul de frînare al forțelor de frecare din lagărul cu rulmenți), momentul cinetic $I\omega$ al sistemului (platformă + om + greutăți) se va conserva. Dacă omul apropie mîinile de corp, momentul de inerție total scade și deci viteza unghiulară va crește. Invers, depărtînd din nou mîinile lateral, I crește și ω scade (fig. 4.9, *a*):

$$I\,\omega = I'\omega', \qquad \omega' > \omega \qquad \text{dacă } I' < I. \qquad (4.21)$$

Un efect analog îl obțin patinatorii și dansatoarele cînd fac piruete apropiind sau depărtînd mîinile de corp.

O altă experiență se poate face cu o roată avînd moment de inerție mare (obadă grea)(roata lui Prandtl). Dacă omul ține roata în sus cu axa verticală, în repaus, și începe la un moment dat s-o învîrte cu viteza unghiulară ω *față de el*, atunci el însuși se va roti cu platforma în sens invers cu o viteză unghiulară Ω (față de Pămînt) (fig. 4.9, *b*). În adevăr inițial momentul cinetic al roții și al omului cu platforma este nul.

Scanned with OKEN Scanner

Final, momentul cinetic al roții față de Pământ este $I_1(\omega + \Omega)$, iar al omului cu platforma este $I_2\,\Omega$, deci

$$0 = I_1(\omega + \Omega) + I_2\,\Omega, \quad \text{de unde} \quad \Omega = -\omega\frac{I_1}{I_1 + I_2}. \tag{4.22}$$

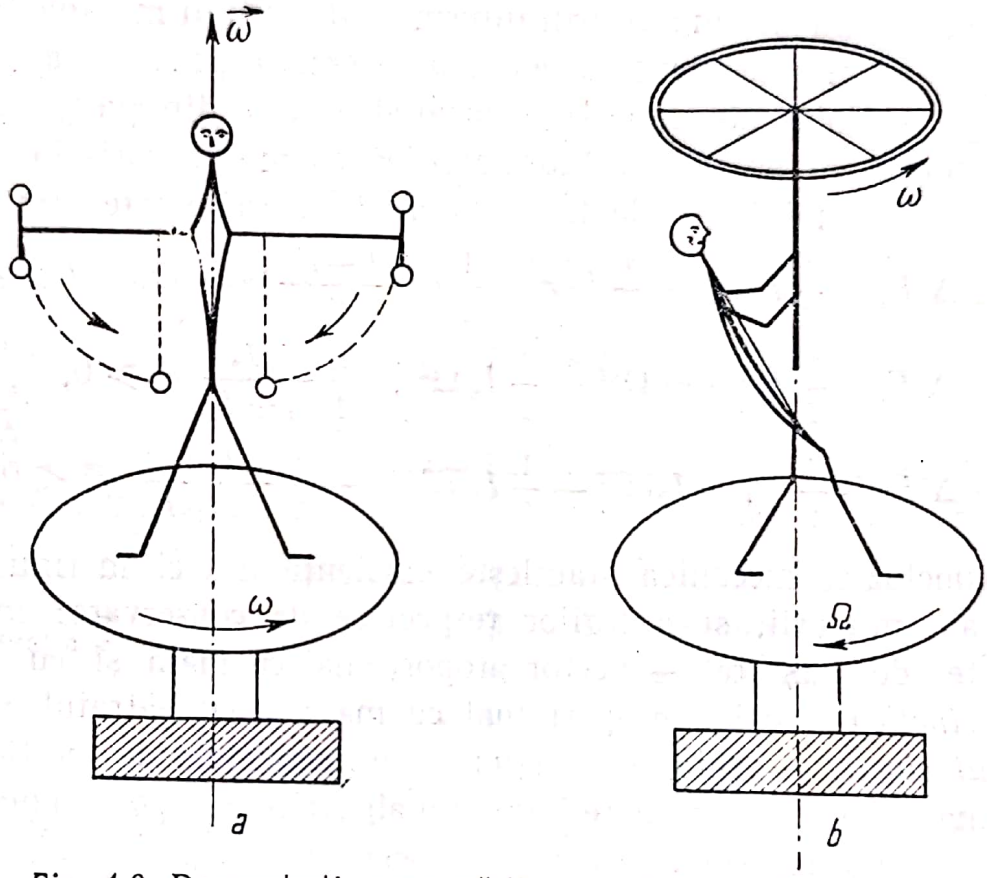


Fig. 4.9. Demonstrația conservării momentului cinetic cu ajutorul scaunului lui Jukowski. a) Depărtînd sau apropiind mîinile de corp, viteza unghiulară de rotație scade, respectiv crește ($I\omega = I'\omega' = \text{const}$). b) Punînd în mișcare de rotație o roată (Prandtl), omul capătă o rotație în sens invers. Oprind o roată deja în rotație sau răsturnînd-o cu 180°, omul capătă o rotație în sensul în care s-a învîrtit inițial roata.

Într-o altă variantă a experienței, omul situat (în repaus) pe platformă ia în mîini roata, cu axa verticală, pusă în prealabil în rotație cu viteza unghiulară ω. Dacă omul oprește roata față de el, atunci întregul sistem va căpăta o rotație Ω în același sens cu ω:

$$I_1\,\omega = (I_1 + I_2)\,\Omega, \quad \text{de unde} \quad \Omega = \omega\frac{I_1}{I_1 + I_2}. \tag{4.23}$$

Dacă, în loc s-o oprească, întoarce axa roții cu 180°, omul cu platforma se va roti și mai repede față de cazul precedent. Întorcînd roata înapoi,

în poziția inițială, omul se oprește și o poate restitui celui care i-a înmînat-o.

Aceste experiențe confirmă faptul că forțele interne nu pot schimba momentul cinetic al unui sistem (nici impulsul total), dar pot schimba energia cinetică a sistemului prin intermediul lucrului mecanic pe care-l efectuează, fie mărind energia cinetică a sistemului pe seama altor forme de energie (chimică etc.), fie transformînd o parte din energia cinetică în alte forme de energie (căldură etc).De exemplu, variația energiei cinetice a sistemului în cele trei experiențe descrise este următoarea:

$$\text{(a)}\ \Delta E_c = \frac{1}{2} I' \omega'^2 - \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{I - I'}{I'} > 0, \text{ dacă } I > I',$$

$$\text{(b)}\ \Delta E_c = \frac{1}{2} I_1 (\omega + \Omega)^2 + \frac{1}{2} I_2 \Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \omega^2 > 0, \qquad (4.24)$$

$$\text{(c)}\ \Delta E_c = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \Omega^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega^2 = -\frac{1}{2} \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \omega^2 < 0.$$

În concluzie, mecanica stabilește existența a trei mărimi fizice, măsuri ale mișcării, și a legilor respective de conservare: *impulsul* (cantitatea de mișcare) — vector proporțional cu masa și cu viteza; *energia cinetică* — scalar proporțional cu masa și cu pătratul vitezei; *momentul cinetic* — vector proporțional cu momentele de inerție și cu viteza unghiulară; prin urmare 7 mărimi algebrice în raport cu un sistem de coordonate și respectiv 7 legi de conservare.

Existența acestor mărimi fizice și a legilor respective de conservare este strîns legată de proprietățile spațiului și timpului — forme de existență ale materiei. Se poate arăta pe baza unor considerații foarte generale, că impulsul corespunde omogenității spațiului (invarianței legilor fizicii la translații spațiale), energia — omogenității timpului (invarianței la „translații" temporale — deplasări ale originii de referință a timpului), momentul cinetic — izotropiei spațiului (invarianței la rotații spațiale). În teoria relativității se mai adaugă 3 legi de conservare a mișcării rectilinii uniforme (după legea inerției) față de SR inerțiale, corespunzător „izotropiei" mixte spațio-temporale (pseudorotații restrînse spațio-temporale = transformări Lorentz ale SR inerțiale).

4.10. **Analogia dintre mișcările de translație și de rotație.** După cum am mai arătat, între mișcarea de translație și mișcarea de rotație există o analogie, un paralelism, o corespondență analogică. Mărimile și ecuațiile care se corespund sînt date în tabela de mai jos. Deoarece

mișcarea de translație este caracterizată de mișcarea unui singur punct arbitrar al rigidului putem vorbi de mișcarea unui punct material în loc de mișcarea de translație.

Translația		Rotația	
Mărimea sau ecuația	**Unit.**	**Mărimea sau ecuația**	**Unit.**
Cinematica			
spațiul s	m	unghiul φ	rad
timpul t	s	timpul t	s
viteza $\vec{v}$	m/s	viteza unghiulară $\vec{\omega}$	rad/s
$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	m/s	$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$	rad/s
mișcarea uniformă: $s = s_0 + vt$		rotația uniformă: $\varphi = \varphi_0 + \omega t$	
accelerația $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$	m/s²	accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon} = \Delta\vec{\omega}/\Delta t$	rad/s²
$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	m/s²	$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$	rad/s²
mișcarea uniform variată: $v = v_0 + at$ $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ formula lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$ $s - s_0 = \frac{v + v_0}{2} t$		rotația uniform variată: $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\varphi - \varphi_0)$ $\varphi - \varphi_0 = \frac{\omega + \omega_0}{2} t$	
timpul și spațiul pînă la oprire ($a < 0$): $t_m = -\frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{\lvert a \rvert}$ $s_m = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\lvert a \rvert}$		timpul și unghiul descris pînă la oprire ($\varepsilon < 0$): $t_m = -\frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{\omega_0}{\lvert \varepsilon \rvert}$ $\varphi_m = -\frac{\omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{\omega_0^2}{2\lvert \varepsilon \rvert}$	

Scanned with OKEN Scanner

Numărul de rotații $N = \frac{\varphi}{2\pi}$.

Turația (în rot/s) sau frecvența de rotație $n\left[\frac{\text{rot}}{\text{s}}\right] = \frac{\omega}{2\pi}$

Dinamica			
masa m	kg	momentele de inerție I	kg-m²
forța $\vec{F}$	N	momentul forței $\vec{M}$	N-m
impulsul (cantitatea de mișcare) $\vec{p} = m\vec{v}$	kg-m/s	momentul cinetic $\vec{J}$ $(\vec{J}_{\parallel} = I\vec{\omega})$	J-s N-m
$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$	N	$\vec{M} = \frac{\Delta\vec{J}}{\Delta t}$	N-m
$F_t = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = ma_t$	N	$M_{\parallel} = \frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t} = I\varepsilon$	
energia cinetică $E_c = \frac{1}{2}mv^2$	J	energia cinetică $E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$	J
puterea $P = \vec{F}\vec{v}$	W	puterea $P = \vec{M}\vec{\omega}$	W

4.11. **Giroscopul**. Giroscopul este un corp solid care se rotește cu turație mare în jurul axei sale principale centrale de inerție cu moment de inerție maxim. Giroscopul tinde să păstreze, datorită inerției sale la rotație, *neschimbată* în spațiu direcția axei sale de rotație și este cu atît mai stabil cu cît turația sa este mai mare și cu cît momentul de inerție este mai mare. De obicei giroscopul este simetric și se rotește în jurul axei sale de simetrie. Giroscopul a fost inventat de Foucault în 1852 (cu intenția de a demonstra rotația Pămîntului). Teoria giroscopului este destul de complicată. Mai jos se fac unele considerații simplificate.

Giroscopul în suspensie *cardanică* își păstrează neschimbată în spațiu direcția axei sale de rotație oricum am mișca (roti) suportul (fig. 4.10). În adevăr, datorită suspensiei cardanice care permite orice orientare în spațiu a axei giroscopului, forțele exterioare dau moment nul față

Scanned with OKEN Scanner

de CM al giroscopului, astfel încît momentul cinetic propriu $\vec{S} = I\vec{\omega}$ se conservă, deci $\vec{\omega}$ se conservă, adică viteza unghiulară ω, precum şi direcţia axei de rotaţie se conservă.

Cel mai simplu giroscop este titirezul sau sfîrleaza. El posedă pro-

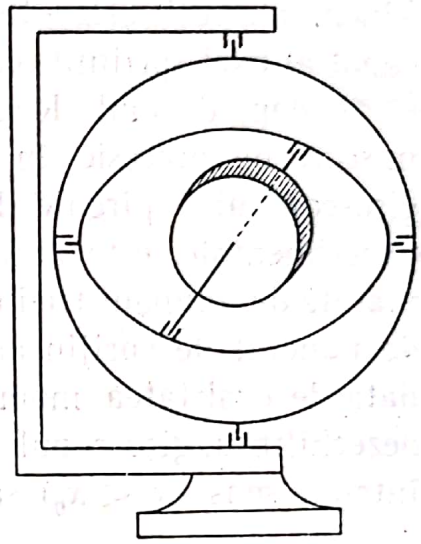


Fig. 4.10. Giroscop în suspensie cardanică. Oricum am roti suportul, axa giroscopului păstrează direcţie fixă în spaţiu.

prietatea de a se roti stabil în jurul axei sale de simetrie verticale, avînd un punct de sprijin inferior al axei (fig.4.11). Oricum am înclina suportul,

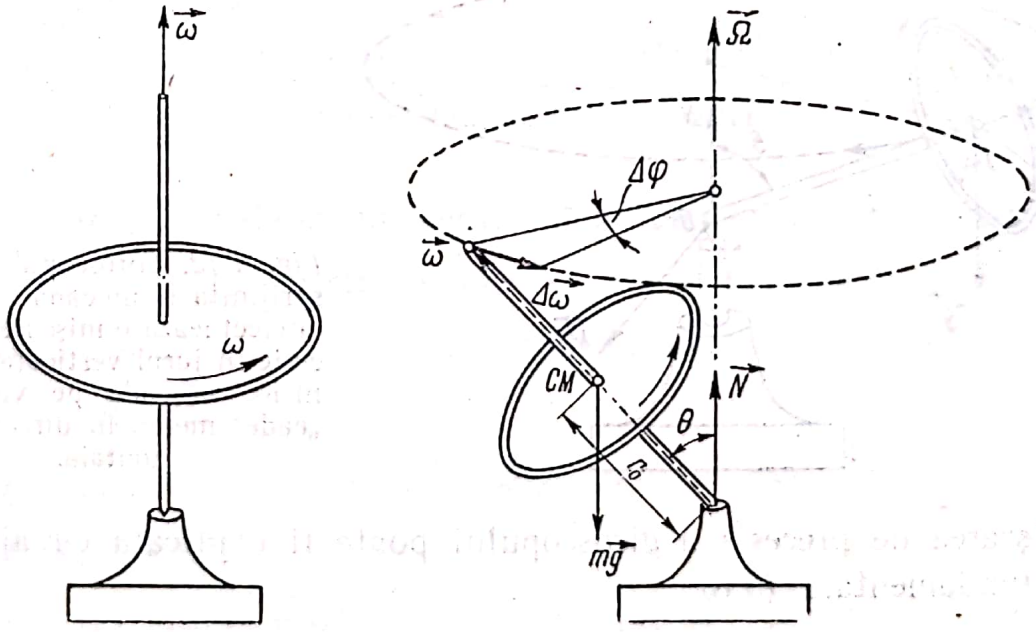


Fig. 4.11. Giroscopul cu punct de sprijin al axei se roteşte stabil în jurul axei sale verticale (titirezul sau sfîrleaza). Înclinat fiind, nu cade, ci efectuează o mişcare de precesie în jurul verticalei („cade" mereu în direcţie orizontală).

Scanned with OKEN Scanner

axa acestui giroscop rămîne verticală. La perturbaţii mici ale axei, giroscopul nu cade, ci axa sa descrie pînza unui con. Această mişcare a axei se numeşte *precesie*.

O altă experienţă asemănătoare se poate face cu o roată uşoară (de bicicletă), dar cu moment de inerţie mare (obadă încărcată cu plumb). Ţinem axa roţii orizontal (sau sub un unghi θ faţă de verticală), cu un capăt al axei sprijinit, ca în figura 4.12. Aducem roata în rotaţie rapidă şi îi dăm drumul. Roata nu cade („cade" orizontal), ci efectuează o mişcare de precesie în jurul axei verticale fixe. O altă variantă a giroscopului — pîrghie (Fessel), adaptată pentru măsurători şi verificări experimentale, este arătată în figura 4.13. Greutatea G poate fi deplasată de-a lungul tijei (axei giroscopului) şi fixată la diferite distanţe x de punctul de sprijin al tijei. Dacă x_0 este poziţia de echilibru static, dată de egalitatea momentelor $Gx_0 = mgr_0$, atunci se constată că la dezechilibru, giroscopul nu cade, ci efectuează o mişcare de precesie într-un sens ($x < x_0$) sau altul ($x > x_0$) în jurul axei verticale.

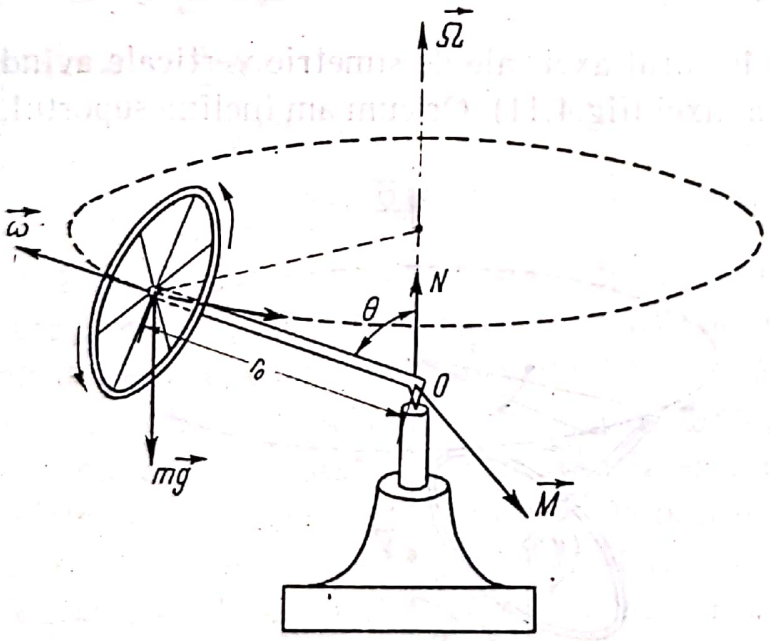


Fig. 4.12. Giroscopul cu axa sprijinită la un capăt nu cade, ci efectuează o mişcare de precesie în jurul verticalei, adică în loc să cadă pe verticală, „cade" mereu în direcţie orizontală.

Mişcarea de precesie a giroscopului poate fi explicată cu ajutorul legii fundamentale (3.8):

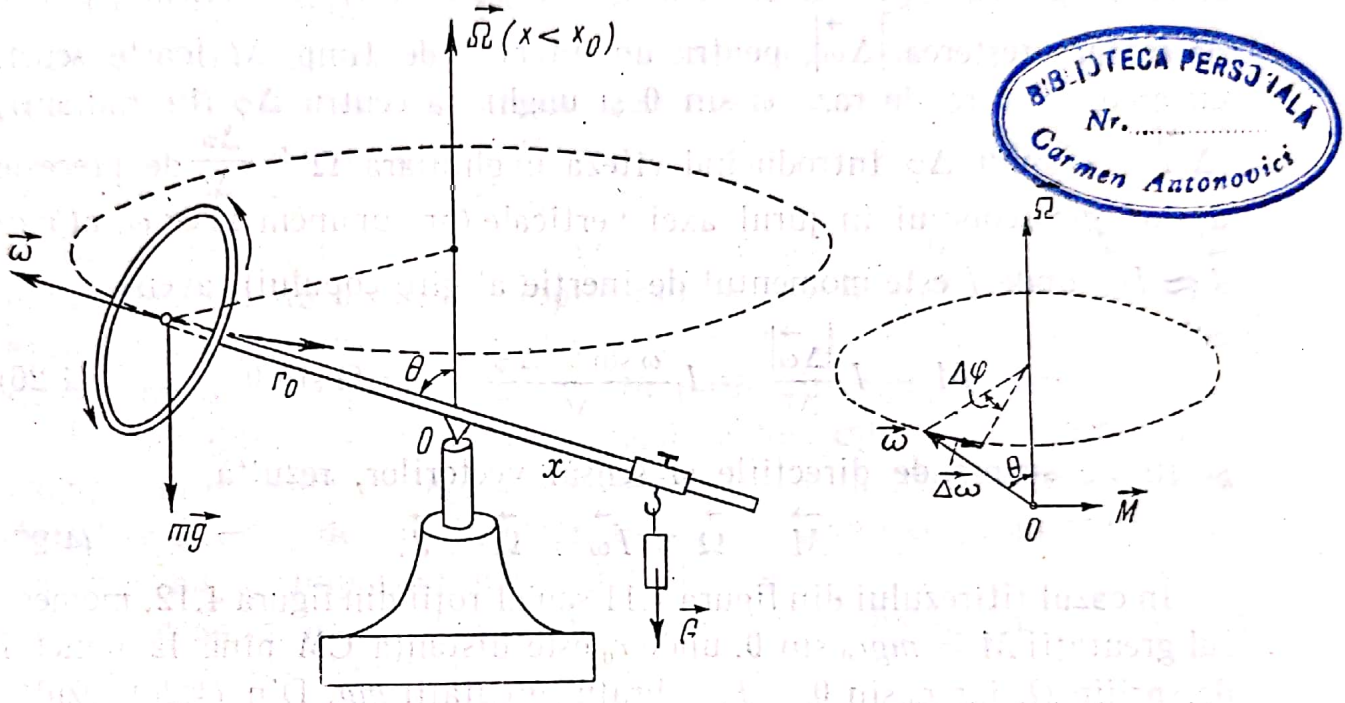
$$\frac{\Delta \vec{J}}{\Delta t} = \vec{M}, \quad \vec{J} = I\vec{\omega}, \quad I\frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \vec{M},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$\Delta\vec{\omega} = \frac{\Delta t}{I} \cdot \vec{M}, \qquad (4.25)$$

adică creșterea vectorului $\Delta\vec{\omega}$, într-un interval de timp foarte scurt



BIBLIOTECA PERSONALĂ
Nr. .....
Carmen Antonovici

Fig. 4.13. Giroscop-pîrghie (Fessel). Fixînd greutatea G la diferite distanțe x de-a lungul tijei, giroscopul nu se răstoarnă, ci efectuează o mișcare de precesie în jurul verticalei într-un sens sau altul.

Δt, este proporțională cu momentul $\vec{M}$ al forțelor aplicate și are *aceeași direcție și sens cu* $\vec{M}$. Aceasta înseamnă că vîrful vectorului $\vec{\omega}$ se deplasează cu $\Delta\vec{\omega}$ în sensul lui $\vec{M}$, adică axa giroscopului $(\vec{\omega})$ se va roti în planul $(\vec{\omega},\vec{M})$ înspre $\vec{M}$:

Giroscopul tinde să așeze axa sa de rotație $\vec{\omega}$ *paralel cu axa rotației forțate (impuse)* $\vec{M}$.

Dacă axa giroscopului $\vec{\omega}$ este după axa Ox, momentul cuplului de forțe $\vec{M}$ (adică axa rotației impuse) după Oy (perpendiculară pe Ox), atunci axa giroscopului se va roti după cea de a 3-a axă Oz, perpendiculară pe Ox și Oy.

Scanned with OKEN Scanner

În experiențele din figura 4.11 — 13 momentul $\vec{M}$ al forțelor față de punctul de sprijin O este orizontal și perpendicular pe axa giroscopului. Atunci creșterea $\Delta\vec{\omega}$ va fi tot în direcția lui $\vec{M}$, adică axa giroscopului $\left(\vec{\omega}\right)$ se va roti cu un unghi $\Delta\varphi$ în planul orizontal în jurul axei verticale. Notînd cu θ unghiul dintre axa giroscopului $\left(\vec{\omega}\right)$ și verticala, putem aproxima creșterea $|\Delta\vec{\omega}|$, pentru un interval de timp Δt foarte scurt, cu arcul de cerc de rază $\omega \sin\theta$ și unghi la centru $\Delta\varphi$ (în radiani): $|\Delta\vec{\omega}| = \omega \sin\theta \cdot \Delta\varphi$. Introducînd viteza unghiulară $\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ de precesie a axei giroscopului în jurul axei verticale (presupunem $\Omega \ll \omega$, atunci $\vec{J} \approx I\vec{\omega}$, unde I este momentul de inerție al giroscopului), avem

$$M = I\frac{|\Delta\vec{\omega}|}{\Delta t} = I\frac{\omega \sin\theta \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = I\,\omega\Omega \sin\theta \qquad (4.26)$$

și ținînd seama de direcțiile și sensul vectorilor, rezultă

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times I\vec{\omega} = \vec{\Omega} \times \vec{J}. \qquad (4.27)$$

În cazul titirezului din figura 4.11 sau al roții din figura 4.12, momentul greutății $M = mgr_0 \sin\theta$, unde r_0 este distanța CM pînă la punctul de sprijin O, iar $r_0 \sin\theta = b$ — brațul greutății mg. Din (4.26) rezultă atunci viteza unghiulară de precesie:

$$\Omega = \frac{mgr_0}{I\omega} = \frac{mgr_0}{J}, \quad (\Omega \ll \omega), \qquad (4.28)$$

care nu depinde de înclinarea θ a axei giroscopului.

Conform principiului III al acțiunii și reacțiunii, giroscopul reacționează, datorită inerției, împotriva forțelor aplicate care dau momentul $\vec{M}$, cu forțe de reacțiune egale în modul și de sens opus, care dau un moment $\vec{M}'$ egal în modul și de sens opus cu $\vec{M}$:

$$\vec{M}' = -\vec{M} = -\vec{\Omega} \times I\vec{\omega}. \qquad (4.29)$$

Aceste *forțe giroscopice* acționează deci asupra lagărelor în planul $\left(\vec{\omega}, \vec{\Omega}\right)$. De exemplu, dacă axa giroscopului este rotită în planul orizontal, forțele giroscopice acționează asupra lagărelor în planul vertical, nu orizontal ! Acest efect giroscopic poate fi dăunător. Astfel, dacă axa turbinei sau volantului la un vapor (sau avion) este orizontală, la un

Scanned with OKEN Scanner

viraj brusc, ea exercită presiuni verticale mari asupra lagărelor, putînd chiar să le distrugă, şi în acelaşi timp înclină vasul în jurul axei orizontale perpendiculare pe axa turbinei. Dacă axa volantului este verticală, virajul nu este periculos, în schimb oscilaţiile longitudinale generează oscilaţii transversale şi reciproc.

Giroscopul are mai multe aplicaţii tehnice bazate pe proprietatea sa de a păstra fixă în spaţiu direcţia axei sale. Astfel, pentru stabilizarea direcţiei de zbor a torpilelor sau rachetelor se foloseşte un giroscop în suspensie cardanică care acţionează asupra dispozitivului de direcţie al torpilei sau rachetei, corijînd traiectoria.

De asemenea, datorită unor ghinturi practicate în ţeava tunului, proiectilele capătă o rotaţie proprie rapidă care le stabilizează direcţia axei. Forţele de frecare perturbătoare nu răstoarnă proiectilul ci produc doar o mişcare de precesie a axei în jurul direcţiei de zbor.

În navigaţia maritimă sau aeriană se foloseşte busola giroscopică (compas giroscopic) în care axa giroscopului arată mereu direcţia S—N. Astfel se elimină declinaţia magnetică şi influenţa corpului metalic al vasului sau a cîmpurilor magnetice străine.

Giroscoape mari sînt folosite pentru atenuarea balansului vapoarelor datorită valurilor (stabilizatoare giroscopice).

Pămîntul, datorită rotaţiei sale diurne, reprezintă un imens giroscop, avînd axa N—S înclinată cu 23°30′ faţă de normala la planul ecliptcei

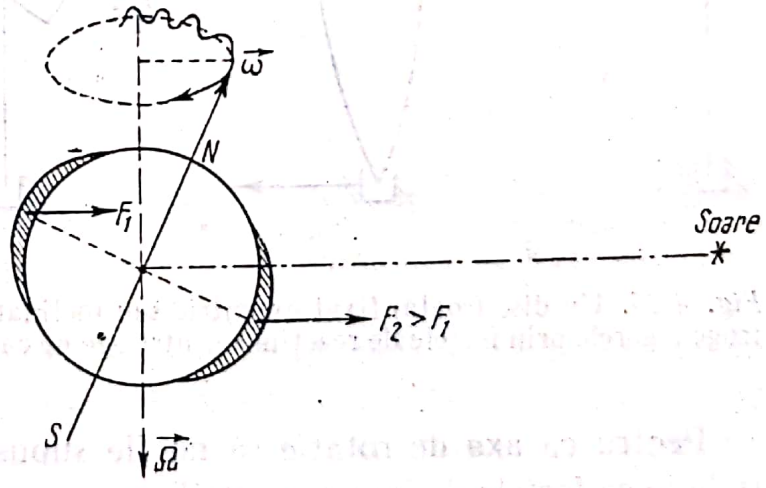


Fig. 4.14. Pămîntul reprezintă un imens giroscop a cărui axă de rotaţie S—N efectuează o mişcare de precesie lentă cu perioadă de 25800 ani şi în acelaşi timp o mişcare de nutaţie cu perioada de 19 ani.

(în care se face revoluţia anuală în jurul Soarelui). Datorită nesfericităţii Pămîntului (turtirii la poli), rezultanta forţelor de atracţie solară nu trece prin centrul Pămîntului, ci dă un moment ca în fig. 4.14, care

Scanned with OKEN Scanner

face ca axa Pământului să execute o mișcare de precesie, descriind pînza unui con, cu o perioadă de $\approx$ 25 800 ani.

Aceasta explică schimbarea stelei polare, adică mișcarea polului ceresc. Datorită influenței Lunii, polul ceresc descrie de-a lungul circumferinței de precesie o curbă analoagă sinusoidei. Această mișcare se numește *nutație* și are o perioadă de $\approx$ 19 ani.

4.12. **Axe libere (spontane).** Experiențele arată (și teoria explică) faptul că un corp, obligat să se rotească în jurul unei axe fixe *diferite* de o axă principală centrală de inerție, reacționează asupra axei și lagărelor cu forțe de reacțiune inerțială care depind în general de pătratul vitezei unghiulare ω și de accelerația unghiulară $\varepsilon = \Delta\omega/\Delta t$. Aceste forțe pot deforma și rupe axul la turații mari sau pot distruge lagărele cu rulmenți datorită presiunii exercitate de ax.

Astfel, un disc fixat excentric sau înclinat îndoaie axul și apasă asupra lagărelor (fig. 4.15).

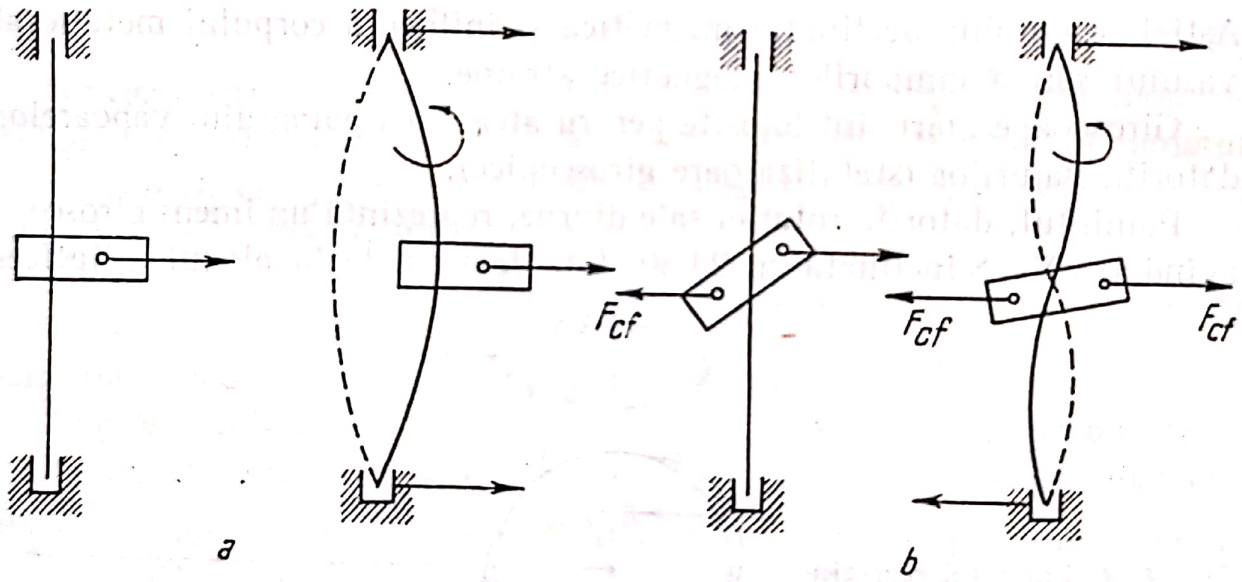


Fig. 4.15. Un disc (roată) fixat excentric sau înclinat (oblic) poate îndoi axul sau distruge lagărele prin forțele de reacțiune centrifuge pe care le dezvoltă în timpul rotației.

Pentru ca axa de rotație să nu fie supusă la eforturi suplimentare, trebuie ca forțele de inerție centrifuge cu care corpul reacționează asupra axei să se echilibreze reciproc (să dea rezultantă nulă și moment rezultant nul), ceea ce reprezintă tocmai condiția care definește o axă principală centrală de inerție (fapt remarcat încă de Euler). Pentru aceasta

Scanned with OKEN Scanner

piesele în rotație (volanții, roțile, turbinele) trebuie bine centrate și echilibrate. Dacă un corp omogen posedă o axă de simetrie, ea va fi axă principală centrală de inerție.

Dacă axa de rotație a corpului este o axă principală centrală de inerție, atunci în experiențele din figura 4.15 lagărul superior poate fi *îndepărtat*, corpul se va roti *liber*, în jurul axei sale verticale. În acest caz, forțele din lagărul inferior dau $M_{\perp} = 0$ și deci $\vec{J} = I\vec{\omega}$ păstrează direcție neschimbată. Din acest motiv axele principale centrale de inerție se numesc *axe libere (spontane)* de rotație. Numai rotația în jurul celor două axe de moment de inerție extremal (maxim sau minim) este stabilă. Axa de moment de inerție intermediar nu dă o rotație stabilă.

O altă serie de experiențe de rotație în jurul axelor libere se face atîrnînd printr-un fir diferite corpuri și punîndu-le în rotație rapidă. Astfel, o bară suspendată vertical se va așeza pînă la urmă orizontal și se va roti în această poziție în jurul axei libere de moment de inerție

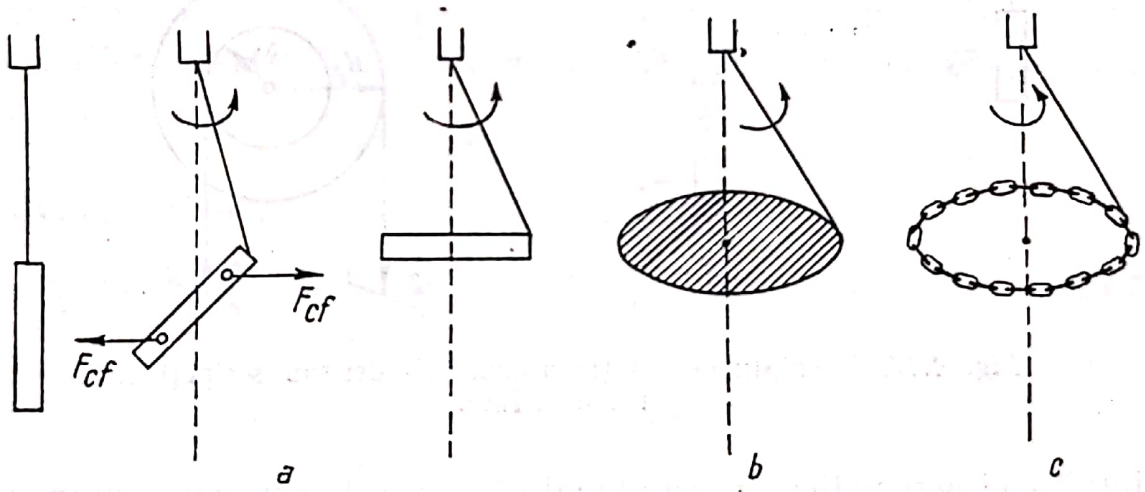


Fig. 4.16. O tijă, un disc sau un lănțișor (cu capetele legate între ele) rotite printr-un fir prins la margine (excentric) se vor așeza pînă la urmă într-o poziție orizontală învîrtindu-se în jurul axei libere de moment de inerție maxim.

maxim (fig. 4.16, *a*). Tot astfel, un disc (sau inel) sau un lănțișor cu capetele legate între ele, prinse lateral, se vor roti stabil în poziție orizontală ca în figura 4.16, *b*, *c*. Dacă perturbăm mișcarea, corpul revine la rotația sa stabilă.

Experiențe și mai simple se fac cu o farfurioară sau o monedă. Ele se pot roti liber și stabil pe o masă în jurul unui diametru vertical.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă însă farfurioara este ovală sau moneda este teșită la forma ovală, putem să le imprimăm o rotație liberă stabilă în jurul diametrului lung, dar nu în jurul celui scurt, deși momentul de inerție în jurul diametrului scurt este mai mare decît în jurul celui lung (dar mai mic decît

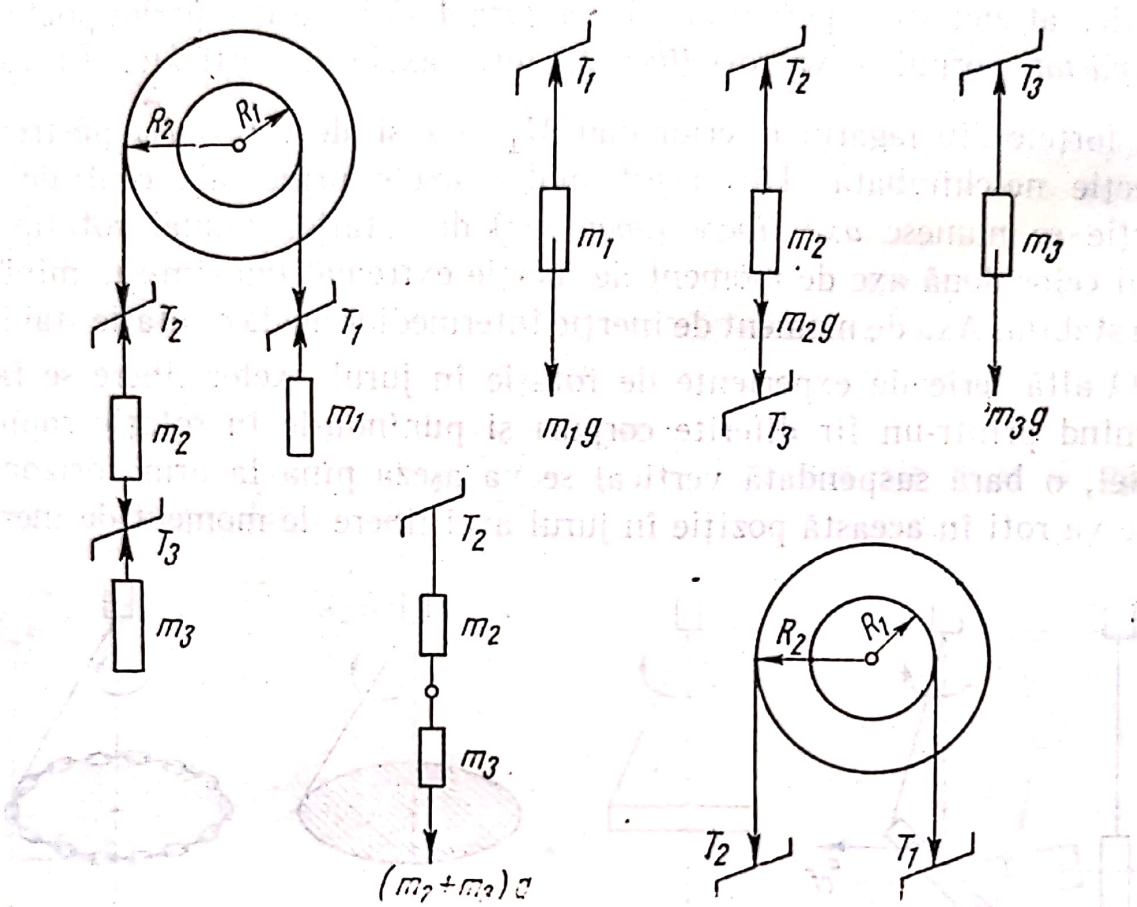


Fig. 4.17. Exemplu de rotație a unor cilindri sau scripeți în jurul axei fixe.

în jurul axei perpendiculare pe planul discului). Farfurioara sau moneda în cel mai bun caz se va ridica și se va roti în jurul diametrului lung.

În sfîrșit, putem arunca în aer o cutie paralelipipedică (de țigări, de chibrituri etc.) imprimîndu-i o rotație liberă stabilă în jurul unei axe perpendiculare pe fața de arie maximă sau minimă, nu însă de arie intermediară (momentul de inerție respectiv va fi maxim, minim sau intermediar).

4.13. **Exemple.** *a*) Peste doi cilindri de raze R_1, R_2, fixați solidar pe același ax orizontal, sînt înfășurate două fire în sensuri opuse avînd un capăt fixat pe cilindru, iar de celălalt atîrnate masele m_1, respectiv

m_2 și m_3, ca în figura 4.17. Cunoscînd momentul de inerție total I al cilindrilor, să se afle: 1) accelerația unghiulară a cilindrilor, 2) accelerațiile maselor, 3) tensiunile din fire, 4) diferența dintre apăsarea statică R_0 (cilindrii împiedicați să se rotească) și apăsarea dinamică R (cilindrii se rotesc liber), exercitate de cilindri asupra lagărelor axului.

Rezolvare. Scriem ecuația fundamentală (legea a II-a) pentru cele 3 mase, presupunînd că cilindrii se rotesc în sens trigonometric:

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1, \quad m_2 g + T_3 - T_2 = m_2 a_2, \quad m_3 g - T_3 = m_3 a_2.$$

Ultimele două ecuații dau prin adunare:

$$(m_2 + m_3)\, g - T_2 = (m_2 + m_3)\, a_2,$$

ceea ce se obține și direct considerînd sistemul $(m_2 + m_3)$ (T_3 se elimină fiind forță internă). Pentru mișcarea de rotație a cilindrilor în jurul axei fixe ecuația fundamentală se scrie:

$$T_2 R_2 - T_1 R_1 = I\varepsilon.$$

Deoarece firele nu lunecă pe cilindri, accelerația tangențială a punctelor periferice ale cilindrilor trebuie să coincidă cu accelerația firului respectiv:

$$a_1 = \varepsilon R_1, \qquad a_2 = \varepsilon R_2.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, găsim

$$\varepsilon = \frac{g}{N}\,[(m_2 + m_3)\, R_2 - m_1 R_1], \text{ unde } N = I + m_1 R_1^2 + (m_2 + m_3)\, R_2^2,$$

$$a_1 = \varepsilon R_1, \qquad a_2 = \varepsilon R_2,$$

$$T_1 = \frac{1}{N} m_1 g\,[I + (m_2 + m_3)\,(R_1 + R_2)\, R_2],$$

$$T_2 = \frac{1}{N}(m_2 + m_3)\, g \quad [I + m_1 R_1 (R_1 + R_2)],$$

$$T_3 = \frac{1}{N} m_3 g\,[I + m_1 R_1 (R_1 + R_2)].$$

Dacă $(m_2 + m_3)R_2 = m_1 R_1$ sistemul este în repaus sau în mișcare uniformă ($\varepsilon = 0$).

Apăsarea exercitată asupra lagărelor este egală cu $T_1 + T_2 + G$, unde G este greutatea cilindrilor. Cînd cilindrii sînt blocați tensiunile sînt $m_1 g$ și $(m_2 + m_3)\, g$, astfel încît rezultă:

$$R_0 - R = \frac{g}{N}\,[(m_2 + m_3)\, R_2 - m_1 R_1]^2 \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Este cunoscută experiența cu mosorul de ață care cade pe podea și se rostogolește sub pat. Trăgîndu-l de fir putem să-l scoatem de sub pat sau dimpotrivă să-l băgăm și mai departe. Figura 4.18 explică cele două situații.

Cînd axa de rotație nu este fixă, avem o mișcare compusă, de translație și de rotație. Vom scrie ecuația fundamentală pentru mișcarea CM

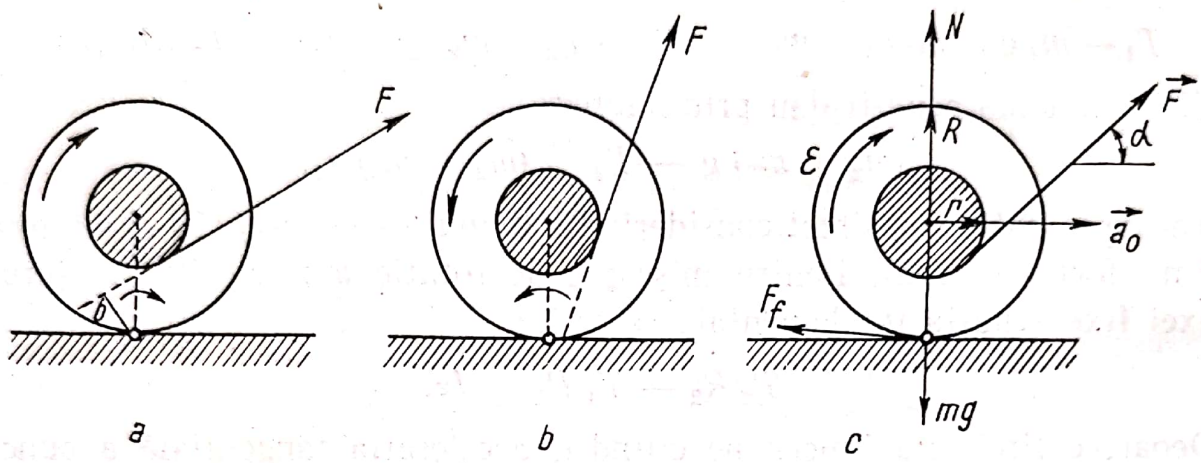


Fig. 4.18. Rostogolirea mosorului tras de ață.

și ecuația fundamentală pentru mișcarea de rotație în jurul CM. Alegînd sensul pozitiv al translației și rotației ca în figura 4.18, *c* și presupunînd că mosorul se rostogolește fără să lunece, avem

$$F\cos\alpha - F_f = ma_0, \qquad F\sin\alpha + N - mg = 0,$$

$$F_f R - Fr = I\varepsilon, \qquad a_0 = \varepsilon R.$$

Relația $a_0 = \varepsilon R$ se poate obține fie considerînd rotația momentană (instantanee) a mosorului în jurul generatoarei de contact cu solul, atunci $v_0 = \omega R$, de unde $\Delta v_0 = \Delta\omega \cdot R$ și $a_0 = \varepsilon R$; fie considerînd mișcarea în SCM, atunci solul fuge înapoi cu accelerația a_0, care trebuie să coincidă cu accelerația tangențială εR a punctelor periferice, în baza condiției de nealunecare.

Rezolvînd sistemul de ecuații, găsim:

$$a_0 = FR\,\frac{R\cos\alpha - r}{I + mR^2}, \quad F_f = F\,\frac{I\cos\alpha + mrR}{I + mR^2}.$$

Mosorul se va rostogoli spre noi ($a_0 > 0$) dacă $R\cos\alpha > r$ (după cum se vede și din figura 4.18, *a*). În cazul lunecării mărimea forței de frecare

Scanned with OKEN Scanner

devine μN, de aceea condiția de rostogolire fără lunecare este $F_f < \mu N = \mu (mg - F \sin \alpha)$.

În cazul rostogolirii cu lunecare ecuațiile devin (acum $F_f = \mu N$ și $a_0 \neq \varepsilon R$):

$F \cos \alpha - \mu N = ma_0$, $F \sin \alpha + N - mg = 0$, $\mu NR - Fr = I\varepsilon$,

care rezolvate fiind, dau

$$a_0 = \frac{F}{m}(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g, \quad \varepsilon = \frac{R}{I}(mg - F \sin \alpha) - \frac{Fr}{I}.$$

Pentru $\mu \longrightarrow 0$ mosorul lunecă spre noi, rotindu-se în sens invers (înapoi).

c) Pe un plan înclinat de unghi α se rostogolește liber în jos fără lunecare o sferă omogenă (sau un cilindru, inel etc.) de rază R și moment de inerție I (fig. 4.19). Să se afle accelerația unghiulară a sferei, accelerația CM, forța de frecare.

Rezolvare. Scriem ecuația fundamentală pentru mișcarea CM și

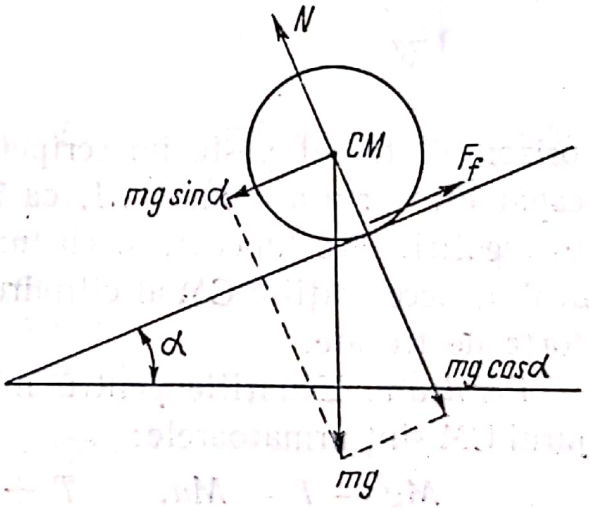


Fig. 4.19. Rostogolirea unei sfere (sau cilindru) pe un plan înclinat.

ecuația fundamentală pentru rotația în jurul CM (în cazul nealunecării $a_0 = \varepsilon R$):

$$mg \sin \alpha - F_f = ma_0, \qquad N - mg \cos \alpha = 0,$$

$$F_f R = I\varepsilon, \qquad a_0 = \varepsilon R,$$

de unde

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mR^2}, \quad a_0 = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mR^2}, \quad F_f = \frac{mg \sin \alpha}{1 + mR^2/I}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul lunecării forța de frecare devine μN și $a_0 \neq \varepsilon R$. Condiția de nealunecare este deci

$$F_f < \mu N \text{ sau } \mu > \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + m R^2/I}.$$

În cazul rostogolirii cu lunecare avem:

$$a_0 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad \varepsilon = \mu \frac{R}{I} mg \cos \alpha, \quad F_f = \mu\, mg \cos \alpha.$$

d) Peste un cilindru omogen de masă m și rază R este înfășurat un fir. Un capăt al firului este prins pe cilindru. Apoi firul este întins

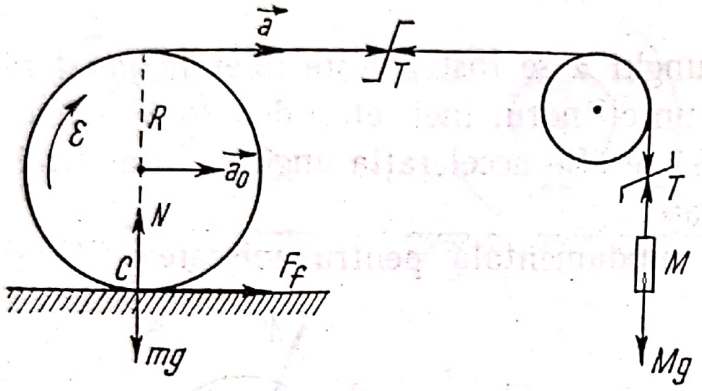


Fig. 4.20. Rostogolirea pe plan orizontal a unui cilindru tras de un fir orizontal (trecut peste un scripete).

orizontal, trecut peste un scripete de inerție neglijabilă și de celălalt capăt este prinsă o masă M, ca în figura 4.20. Să se calculeze în cazul rostogolirii fără lunecare și cu lunecare: accelerația unghiulară a cilindrului, accelerațiile CM al cilindrului și al masei M, tensiunea din fir, forța de frecare.

Rezolvare. Ecuațiile pentru mișcarea de translație și de rotație în jurul CM sînt următoarele:

$$Mg - T = Ma, \qquad T + F_f = ma_0, \qquad N - mg = 0,$$

$$TR - F_f R = I\varepsilon, \qquad I = \frac{1}{2} m R^2.$$

În cazul nealunecării, considerînd rotația în jurul punctului inferior care este de fiecare dată în repaus, rezultă: $a_0 = \varepsilon R$, $a = \varepsilon \cdot 2R$. Obținem astfel:

$$\varepsilon = \frac{g}{R} \frac{4M}{3m + 8M}, \qquad a_0 = \varepsilon R, \qquad a = 2\varepsilon R,$$

$$T = \frac{3m\ Mg}{3m + 8M}, \qquad F_f = \frac{m\ Mg}{3m + 8M}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul lunecării forța de frecare devine $\mu N = \mu mg$, de aceea condiția de nealunecare este:

$$F_f < \mu\, mg \text{ sau } \mu > \frac{M}{3m+8M}.$$

În cazul rostogolirii cu lunecare: $F_f = \mu mg$, $a - a_0 = \varepsilon R$ și atunci obținem:

$$\varepsilon = \frac{2g}{R}\,\frac{M-\mu(m+2M)}{m+3M},\quad a_0 = g\,\frac{M+\mu(m+4M)}{m+3M},\quad a = g\,\frac{3M-\mu M}{m+3M},$$

$$T = \frac{(1+\mu)\,mMg}{m+3M}.$$

În virtutea condiției de alunecare, rezultă $\varepsilon > 0$ și $a > 0$, după cum era de așteptat.

Propunem rezolvarea și discutarea (forța de frecare!) aceleași probleme considerînd însă un cilindru gol cu pereți subțiri (cilindru din tablă de fier), cu moment de inerție $I = mR^2$.

Probleme

4.1. Un volant cu moment de inerție $I = 1$ kg·m² se rotește uniform frînat, micșorîndu-și turația de la $n_1 = 360$ rot/min pînă la $n_2 = 180$ rot/min într-un interval de timp $\tau = 3{,}14$ min. Să se afle accelerația unghiulară, momentul de frînare, lucrul mecanic de frînare, numărul de rotații efectuate în acest timp.

R. $\varepsilon = 2\pi\,(n_2 - n_1)/\tau = -0{,}1$ rad/s², $M = I\varepsilon = -0{,}1$ N.m,

$$W = 2\pi^2 I\,(n_2^2 - n_1^2) = -533\ J,\ N = \frac{1}{2}\,(n_1+n_2)\,\tau = 848 \text{ rot.}$$

4.2. Pe o roată de rază R și moment de inerție I este înfășurat un fir de capătul căruia este atîrnat un corp de masă m. Ce turație capătă roata cînd corpul a coborît cu o distanță h?

R. $n = \sqrt{\dfrac{mgh}{2\pi^2(mR^2+I)}}$

4.3. Pe un disc omogen de masă M și rază R este înfășurat un fir. La capătul firului este atîrnat un corp de masă m_1 de care este legat în

Scanned with OKEN Scanner

continuare printr-un alt fir un alt corp de masă m_2. Să se afle accelerația unghiulară cu care se rotește discul și tensiunile din cele două fire.

R. $\varepsilon = \dfrac{g}{R}\dfrac{1}{1+I/(m_1+m_2)R^2}$, $I = \dfrac{1}{2}MR^2$, $T_1 = I\varepsilon/R$,

$$T_2 = m_2 g \frac{1}{1+(m_1+m_2)R^2/I}.$$

4.4. Pe un disc orizontal omogen de masă $M = 35$ kg, care se rotește cu turația $n_1 = 20$ rot/min, se află la periferie un om (considerat punct material) de masă $m=70$ kg. Ce turație n_2 va căpăta discul dacă omul trece de la periferie la centrul discului? De cîte ori crește energia cinetică a sistemului?

R. $n_2 = n_1(1+mR^2/I) = n_1(1+2m/M) = 100$ rot/min,

$E_2/E_1 = 1+mR^2/I = 1+2m/M = 5.$

4.5. Un om de masă $m=70$ kg se află pe un disc orizontal omogen de masă $M = 35$ kg și de rază $R = 4$ m. Ce turație va căpăta discul, aflat inițial în repaus, dacă omul va începe să alerge pe disc cu viteza constantă $v=3{,}14$ m/s față de disc, pe o circumferință concentrică de rază $r=2$ m? Ce energie cinetică se creează?

R. $n = \dfrac{v}{2\pi r(1+I/mr^2)} = 10$ rot/min, $E_c = \dfrac{1}{2}\dfrac{mv^2}{1+mr^2/I} = 173$ J.

4.6. Cu ce unghi α trebuie deviată o bară subțire omogenă de lungime $l = 1{,}2$ m, suspendată de un capăt, pentru ca, lăsată liber, celălalt capăt să atingă viteza $v=4{,}2$ m/s în momentul cînd bara va trece prin poziția verticală de echilibru?

R. $\alpha = 2 \arcsin \dfrac{v}{\sqrt{6gl}} = 60°.$

4.7. O sferă omogenă de masă $m=1$ kg se rostogolește fără lunecare pe un plan orizontal cu viteza $v_1 = 10$ cm/s, lovește un perete și se în-

Scanned with OKEN Scanner

toarce rostogolindu-se fără lunecare cu viteza $v_2 = 8$ cm/s. Să se afle cantitatea de căldură degajată la ciocnire.

R. $Q = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)(v_1^2 - v_2^2) = \frac{7}{10} m (v_1^2 - v_2^2) = 2{,}5$ mJ

4.8. Pe un plan înclinat de unghi α se rostogolește liber de la o înălțime h, fără viteză inițială, și fără lunecare, un corp omogen rotund (sferă sau cilindru etc .) de masă m, de rază R și moment de inerție I. Să se afle viteza finală v cu care ajunge corpul la baza planului și timpul de coborîre. Invers, la ce înălțime h și în cît timp urcă pe planul înclinat, fără lunecare, același corp lansat cu viteza inițială v?

R. $v^2 = \frac{2gh}{1 + I/mR^2}$, $t = \frac{v}{g \sin \alpha}\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)$.

4.9. Peste un scripete de masă m_1, rază R și moment de inerție I, este înfășurat un fir. Un capăt al firului este fixat de tavan, iar de celălalt capăt este legat un corp de masă m_2. Scripetele este lăsat liber. Să se afle accelerația cu care coboară scripetele și corpul m_2, precum și tensiunile din firele de suspensie.

R. $a_1 = \frac{g}{1 + I/m_1R^2}$, $a_2 = 0$, $T_1 = g\frac{m_1 + m_2 + m_1m_2R^2/I}{1 + m_1R^2/I}$, $T_2 = m_2g$.

4.10. Un cilindru omogen rigid de rază $R = 4{,}9$ cm, căruia i se imprimă o turație $n = 15$ rot/s, este așezat pe o masă orizontală rigidă cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0{,}1$ și lăsat liber. După cît timp τ mișcarea cilindrului trece în rostogolire fără lunecare? Ce accelerație va avea cilindrul după aceea?

R. $\tau = \frac{2\pi nR}{\mu g\,(1 + mR^2/I)} = \frac{2\pi nR}{3\mu g} = 1{,}57$ s, $a = 0$ pentru $t > \tau$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

Sisteme de referinţă neinerţiale

Legile mecanicii clasice sînt valabile numai faţă de anumite SR, numite inerţiale.

5.1. Sisteme de referinţă inerţiale. Sistemele de referinţă inerţiale pot fi definite cu ajutorul legii I a inerţiei: Un SR este inerţial dacă în acest sistem este valabilă legea inerţiei, adică un punct material nesupus la nici o forţă se mişcă rectiliniu uniform.

Toate SR care se mişcă rectiliniu uniform faţă de un sistem inerţial, vor fi şi ele inerţiale, deoarece mişcarea rectilinie uniformă din legea inerţiei va fi tot rectilinie uniformă şi în aceste sisteme. Prin urmare, există o infinitate de SR inerţiale care se mişcă rectiliniu uniform unele faţă de altele. Dar orice SR mişcat *accelerat* faţă de un sistem inerţial este sigur neinerţial, deoarece într-un astfel de sistem mişcarea rectilinie uniformă din sistemul inerţial va apărea ca mişcare accelerată, deşi punctul material nu este supus la nici o forţă.

Experienţa arată că SR legate de stele sau de Soare sînt inerţiale cu un mare grad de precizie, în schimb Pămîntul nu constituie un SR riguros inerţial, din cauza rotaţiei sale diurne faţă de stele.

Pentru a stabili cum trebuie scrisă legea fundamentală a mecanicii într-un SR neinerţial trebuie să găsim legea de transformare a acceleraţiei de la un SR la altul sau altfel spus, legea de compunere a acceleraţiilor. În prealabil să reamintim legea de compunere a vitezelor.

5.2. Compunerea vitezelor. Fie un punct material P a cărui mişcare este studiată sau raportată la două sisteme de referinţă (repere) S şi S′, dintre care S se consideră prin convenţie „fix“ sau „absolut“ (ştim că nu există repaus absolut), iar celălalt S′ — „mobil“ (fig. 5.1).

Scanned with OKEN Scanner

Într-un timp Δt punctul material se deplasează din P_1 în P_2, iar SR mobil S′ din poziția S'_1 în poziția S'_2 ca în figura 5.2. Deplasarea absolută a punctului material este $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{\Delta r}_{abs}$. Pentru a găsi deplasarea relativă trebuie să marcăm mai întîi față de S'_2 poziția inițială a punc-

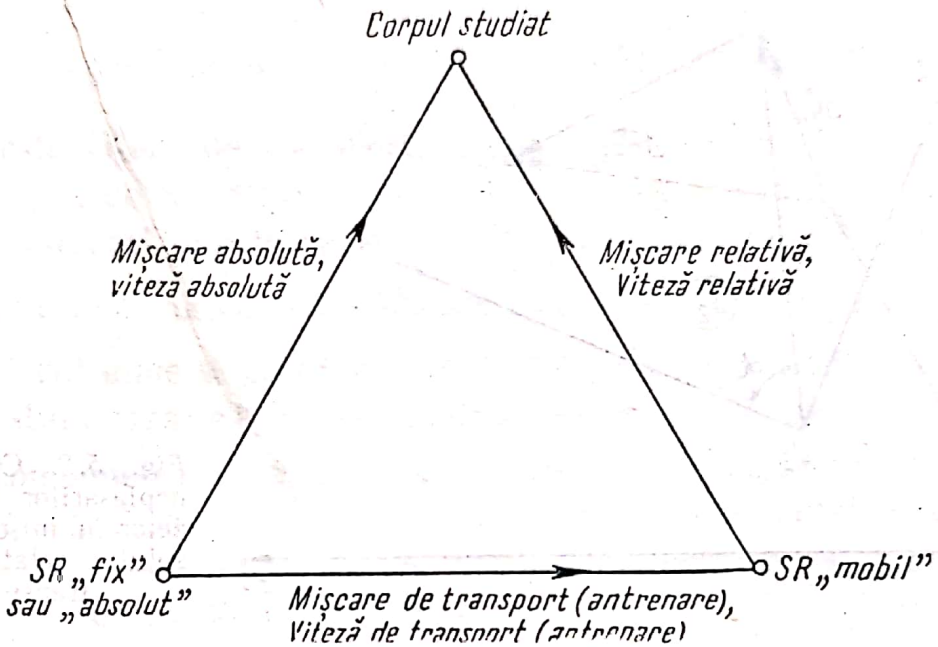


Fig. 5.1. Schemă care ilustrează mișcările: absolută, relativă și de transport (sau de antrenare).

tului material așa cum a înregistrat-o și o vede în continuare observatorul mobil, adică poziția punctului P_1 deplasat *solidar* cu S′; acesta este punctul P'_1 situat față de S'_2 exact la fel ca P_1 față de S'_1. Pentru observatorul mobil punctele P_1, P'_1 se confundă deoarece reprezintă pentru el poziția inițială a punctului material. Deplasarea $\overrightarrow{P_1P'_1}$ reprezintă deplasarea unui punct P_1 legat rigid de sistemul mobil S', deci reprezintă deplasarea de transport sau de antrenare: $\overrightarrow{P_1P'_1} = \vec{\Delta r}_{tr}$.

Pentru observatorul mobil poziția inițială și cea finală ale punctului material sînt P'_1, P_2 și deplasarea relativă $\vec{\Delta r}_{rel} = \overrightarrow{P'_1P_2}$. Aceste poziții și această deplasare pentru a fi considerate *relative* la S′ trebuie măsurate cu instrumentele de măsură (riglele, ceasornicele etc.) proprii observatorului mobil S′, adică aflate „la bordul" lui S′, deoarece, în adevăr, observatorul mobil măsoară elementele mișcării relative, deci față de el, cu

Scanned with OKEN Scanner

mijloacele sale proprii. Instrumentele din S′ pot fi de exemplu transportate din S sau etalonate (sincronizate) după cele din S, la un moment dat, după un anumit procedeu sau construite după aceeași „rețetă". Se pune întrebarea dacă măsurînd aceeași distanță, lungime a unui

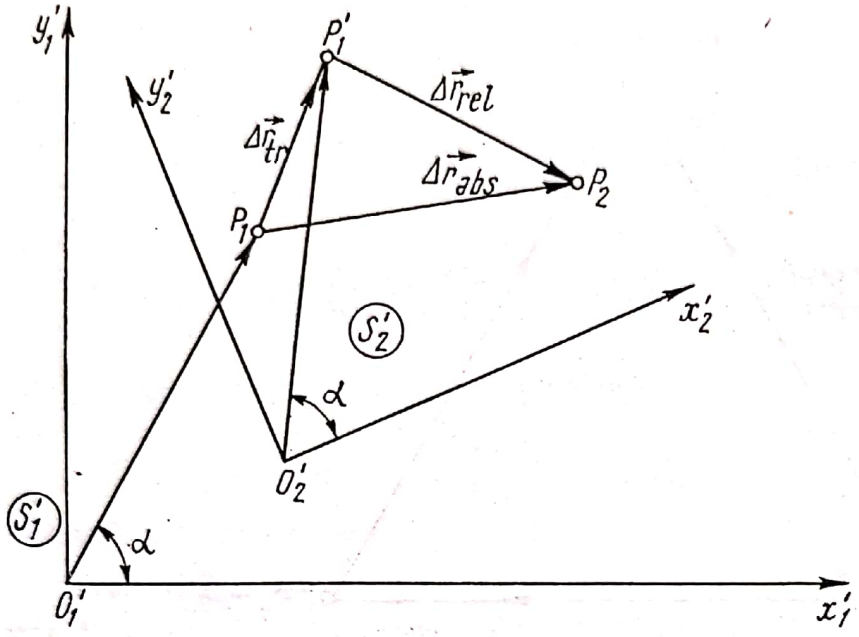


Fig. 5.2. Compunerea deplasărilor și a vitezelor în mișcările: absolută, relativă și de transport.

obiect sau durată a unui proces, din diferite SR, se obțin aceleași rezultate sau, altfel, dacă *rezultatele măsurătorilor depind de starea de mișcare a instrumentelor sau a obiectelor (corpurilor) măsurate*. În mecanica clasică se consideră că lungimile (distanțele) și duratele (intervalele de timp), măsurate în diferite SR, sînt egale, independente de SR sau invariante la schimbarea SR sau, altfel, au un caracter absolut. O serie de experiențe efectuate la sfîrșitul secolului trecut, privind propagarea luminii, au dus la concluzia că la viteze mari, apropiate de viteza luminii $\left(c = 3.10^8 \ \frac{m}{s}\right)$, ipoteza de mai sus nu mai este corectă. Astfel s-a născut teoria relativității (A. Einstein, 1905) despre care vom vorbi în cap. 7.

Considerînd valabilă ipoteza caracterului absolut al lungimilor și duratelor (viteze mici față de viteza luminii), deplasarea $\overrightarrow{P_1'P_2}$ va reprezenta deplasarea relativă $\Delta\vec{r}_{rel}$, avînd aceeași valoare în S și S′, astfel încît putem scrie *legea de compunere a deplasărilor*:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P_1'} + \overrightarrow{P_1'P_2} \text{ sau } \Delta\vec{r}_{abs} = \Delta\vec{r}_{rel} + \Delta\vec{r}_{tr}. \qquad (5.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum intervalul de timp în care s-a deplasat punctul material este același în S și S', $\Delta t = \Delta t'$, în virtutea caracterului absolut al duratelor (timpul curge la fel în S și S'), obținem *legea compunerii vitezelor din mecanica clasică*:

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr}, \tag{5.2}$$

$$\vec{v}_{abs} = \Delta\vec{r}_{abs}/\Delta t, \quad \vec{v}_{rel} = \Delta\vec{r}_{rel}/\Delta t', \quad \Delta\vec{v}_{tr} = \Delta\vec{r}_{tr}/\Delta t,$$

unde $\vec{v}_{tr}$ este viteza de transport, adică viteza acelui punct-suport din S', legat rigid de S', deci mișcat solidar cu S', prin care trece în momentul considerat punctul material. De exemplu, viteza bărcii față de țărm ($\vec{v}_{abs}$) este egală cu viteza bărcii față de rîu ($\vec{v}_{rel}$) plus viteza apei rîului în locul unde se află barca ($\vec{v}_{tr}$). Viteza de transport se compune în general din viteza de translație și viteza de rotație ale reperului mobil S'.

5.3. Compunerea accelerațiilor. În general compunerea accelerațiilor este o problemă mai complicată decît compunerea vitezelor. Vom rămîne în cadrul mecanicii clasice, deci vom presupune valabilă ipoteza caracterului absolut al lungimilor și duratelor.

Scriind vitezele (5.2) pentru două momente succesive de timp și făcînd diferența vectorială, găsim variațiile vitezelor:

$$\Delta\vec{v}_{abs} = \Delta\vec{v}_{rel} + \Delta\vec{v}_{tr},$$

unde în general $\Delta\vec{v}_{rel}/\Delta t'$ nu coincide cu $\vec{a}_{rel}$, iar $\Delta\vec{v}_{tr}/\Delta t$ nu coincide cu $\vec{a}_{tr}$. În adevăr, dacă sistemul mobil S' are o mișcare de *translație* față de S, atunci toate punctele sale au aceleași viteze și aceleași accelerații, de aceea $\Delta\vec{v}_{tr}/\Delta t$ are aceeași valoare oriunde s-ar găsi punctul material și reprezintă în adevăr accelerația de transport, adică accelerația acelui punct-suport din S' legat rigid de S', deci mișcat solidar cu S', prin care trece punctul material la momentul considerat. Mai departe, deoarece mișcarea de *translație* duce un vector dat într-un vector echipolent, a căror diferență este nulă, deci nu introduce o variație a vectorilor, rezultă că $\Delta\vec{v}_{rel}/\Delta t'$ reprezintă $\vec{a}_{rel}$, deoarece această variație este produsă numai de mișcarea relativă a punctului material,

Scanned with OKEN Scanner

nu și de translația sistemului mobil S'. În consecință, în cazul cînd *mișcarea de transport este o mișcare de translație*, avem

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr}. \tag{5.3}$$

Dacă sistemul mobil S' are o mișcare de translație și de *rotație*, vitezele diferitelor sale puncte, adică $\vec{v}_{tr}$, sînt diferite, atunci variația $\Delta\vec{v}_{tr}/\Delta t$ se compune, pe de o parte, dintr-o variație datorită mișcării sistemului mobil S', ceea ce reprezintă $\vec{a}_{tr}$, adică accelerația punctului-suport din S' , legat rigid de S', deci mișcat solidar cu S', prin care trece punctul material și, pe de altă parte, dintr-o variație datorită deplasării *relative* a punctului material din poziția inițială $\vec{r}'_1$ unde viteza de transport este $\vec{v}_{tr1}$ în poziția finală $\vec{r}'_2$ unde viteza de transport $\vec{v}_{tr2}$ este în general *alta*. Această variație a vitezei de transport este egală cu diferența vitezelor de rotație ale punctelor $\vec{r}'_2$ și $\vec{r}'_1$ (viteza de translație comună se reduce):

$$\vec{v}_{tr2} - \vec{v}_{tr1} = \vec{\omega} \times \vec{r}'_2 - \vec{\omega} \times \vec{r}'_1 = \vec{\omega} \times (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1) = \vec{\omega} \times \Delta\vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}\Delta t.$$

În consecință,

$$\frac{\Delta\vec{v}_{tr}}{\Delta t} = \vec{a}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}. \tag{5.4}$$

Datorită rotației sistemului mobil S', vectorul $\vec{v}_{rel}$ are o variație suplimentară $\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}\Delta t$, exact ca variația vectorului de poziție $\vec{r}$ al unui punct în mișcarea de rotație (§4.2, fig. 4.2, formula (4.1), $\Delta\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}\Delta t$). În consecință,

$$\frac{\Delta\vec{v}_{rel}}{\Delta t} = \vec{a}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}. \tag{5.5}$$

De exemplu, chiar dacă $\vec{a}_{rel}=0$, adică vectorul $\vec{v}_{rel}$ este fix față de S', totuși față de S el este rotit solidar cu S', deci are o variație $\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}\Delta t$.

Accelerația suplimentară care apare în cazul rotației sistemului mobil, adică atunci cînd mișcarea de transport conține și o rotație, a

Scanned with OKEN Scanner

fost studiată de matematicianul francez Coriolis (1795—1843) și se numește *accelerație Coriolis*. Legea generală de compunere a accelerațiilor în mecanica clasică este:

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{cor}, \quad \vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}, \tag{5.6}$$

$$a_{cor} = 2\omega\, v_{rel} \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_{rel}) = 2\omega\, v_{rel}^{\perp}; \tag{5.7}$$

unde $v_{rel}^{\perp}$ este componenta vitezei relative, perpendiculară pe axa de rotație. Accelerația Coriolis este nulă dacă sistemul mobil S′ nu se rotește ($\omega = 0$) sau viteza relativă este nulă ($v_{rel} = 0$) sau paralelă cu axa de rotație $\vec{\omega}$, atunci $v_{rel}^{\perp} = v_{rel} \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_{rel}) = 0$. Accelerația Coriolis este perpendiculară pe axa de rotație $\vec{\omega}$ a sistemului mobil S′ și pe viteza relativă $\vec{v}_{rel}$, avînd direcția și sensul produsului vectorial respectiv. Accelerația Coriolis este un efect de „interferență" (de „cuplaj") dintre mișcarea de transport (ω) și mișcarea relativă (v_{rel}).

5.4. **Exemple.** a) Pe un disc, aflat în rotație uniformă în jurul unei axe fixe ($\vec{\omega} = \text{const}$), se mișcă circular uniform față de disc ($|\vec{v}_{rel}| = \text{const}$) de-a lungul unei circumferințe a discului un punct material (fig. 5.3, a).

Viteza de transport $v_{tr} = \omega R$ este tangențială, paralelă cu v_{rel} și se adună algebric cu aceasta: $v_{abs} = v_{rel} + v_{tr} = v_{rel} + \omega R$. Accelerația relativă este centripetă: $a_{rel} = v_{rel}^2/R$. Accelerația de transport este centripetă: $a_{tr} = \omega^2 R = v_{tr}^2/R$. Accelerația Coriolis este de asemenea centripetă $a_{cor} = 2\omega\, v_{rel}$. Accelerația absolută rezultă tot centripetă:

$$a_{abs} = v_{rel}^2/R + v_{tr}^2/R + 2\omega\, v_{rel}.$$

Dar accelerația absolută rezultă și direct, deoarece punctul material are o mișcare absolută circulară uniformă cu viteza $v_{abs} = v_{rel} + v_{tr}$, deci accelerația absolută este centripetă:

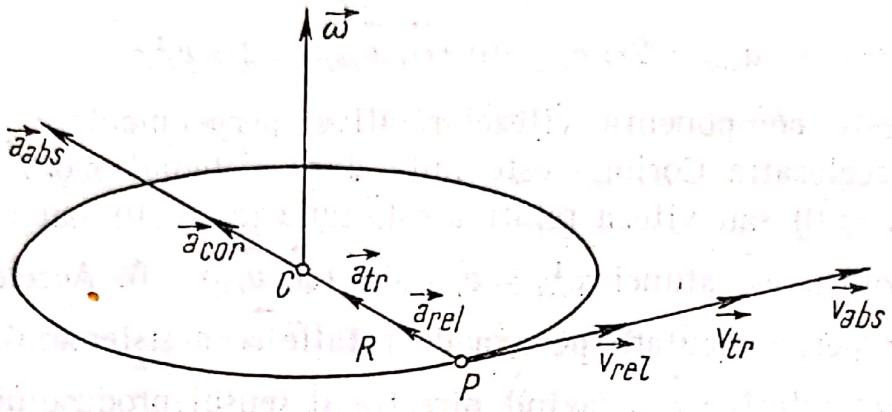
$$a_{abs} = v_{abs}^2/R = \frac{1}{R}(v_{rel} + v_{tr})^2 = \frac{1}{R}v_{rel}^2 + \frac{1}{R}v_{tr}^2 + \frac{2}{R}v_{rel}v_{tr},$$

ceea ce coincide cu expresia precedentă, deoarece $v_{tr} = \omega R$.

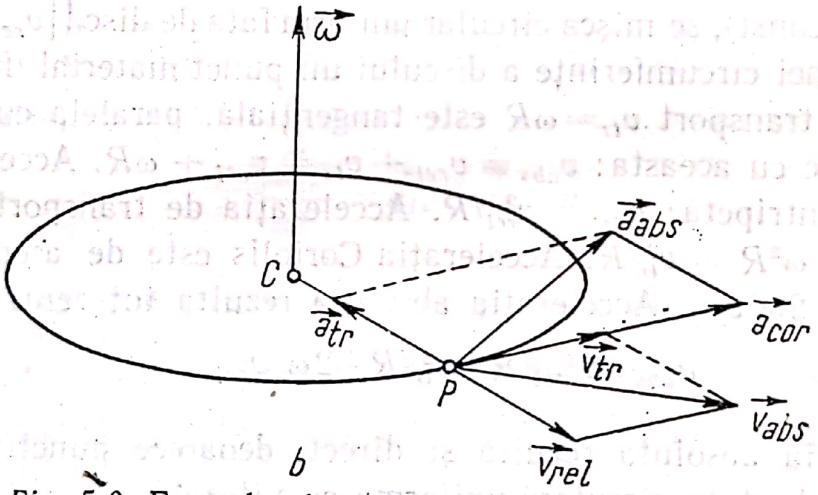
Jumătate din accelerația Coriolis provine din variația direcției vitezei de transport atunci cînd punctul material se deplasează pe cerc în timpul Δt din poziția inițială în cea finală. Unghiul în radiani dintre

Scanned with OKEN Scanner

cele două viteze de transport vecine este $\Delta\alpha' = \Delta s'/R = v_{rel}\,\Delta t/R$, deci $\Delta v_{tr} = v_{tr}\cdot\Delta\alpha' = v_{tr}\,v_{rel}\,\Delta t/R$, de unde $\frac{1}{2}\,a_{cor} = v_{tr}v_{rel}/R = \omega v_{rel}$ și este centripetă. Cealaltă jumătate a accelerației Coriolis provine din rotația suplimentară a vectorului tangențial $\vec{v}_{rel}$ în timpul Δt datorită rotației



a



b

Fig. 5.3. Exemple de compunere a vitezelor și accelerațiilor.

discului: $\Delta v_{rel} = v_{rel}\cdot\Delta\alpha = v_{rel}\cdot\Delta s/R = v_{rel}v_{tr}\Delta t/R = \frac{1}{2}\,a_{cor}\,\Delta t$ și este centripetă.

b) Pe același disc, punctul material se mișcă rectiliniu uniform față de disc ($\vec{v}_{rel}$ = const. față de disc) de-a lungul unei raze a discului (fig. 5.3, b). Traiectoria absolută este o spirală.

Scanned with OKEN Scanner

Acceleraţia relativă este nulă. Acceleraţia de transport este, ca şi mai înainte, centripetă $a_{tr} = \omega^2 R = v_{tr}^2/R$. Acceleraţia Coriolis este tangenţială: $a_{cor} = 2\omega\, v_{rel}$. Jumătate din acceleraţia Coriolis provine din variaţia modulului vitezei de transport (direcţia rămînînd tangenţială) în timpul mişcării relative a punctului material:

$$v_{tr2} - v_{tr1} = \omega R_2 - \omega R_1 = \omega v_{rel}\, \Delta t = \frac{1}{2} a_{cor}\, \Delta t.$$

Cealaltă jumătate provine din rotaţia vectorului radial $\vec{v}_{rel}$ datorită rotaţiei discului ($\vec{v}_{rel}$ este invariabil faţă de disc!) şi este tot tangenţială:

$$\Delta v_{rel} = v_{rel} \cdot \Delta\alpha = v_{rel} \cdot \Delta s/R = v_{rel} \cdot v_{tr} \cdot \Delta t/R = \frac{1}{2} a_{cor}\, \Delta t.$$

c) Un caz particular foarte important este cazul mişcării *rectilinii uniforme* (*translaţie uniformă*) a sistemului mobil S′ faţă de cel fix S. Atunci $a_{tr} = 0$, $a_{cor} = 0$ şi deci $\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel}$. Aceasta înseamnă că *acceleraţia unui punct material nu se schimbă atunci cînd trecem de la un SR dat la oricare altul mişcat* **rectiliniu uniform** *faţă de primul*. Acceleraţia este aceeaşi faţă de întreaga clasă sau familie de SR care se mişcă *rectiliniu uniform* unele faţă de altele. *Acceleraţia este invariantă la* **translaţii uniforme** *ale sistemului de coordonate.*

În particular, mişcarea rectilinie uniformă ($\vec{a}=0$) faţă de un SR va fi tot rectilinie uniformă faţă de oricare alt SR mişcat rectiliniu uniform faţă de primul, adică *mişcarea rectilinie uniformă este invariantă la translaţii uniforme ale sistemului de coordonate*. Prin urmare, legea inerţiei, fiind valabilă într-un SR inerţial dat, este valabilă în întreaga clasă a sistemelor de referinţă inerţiale, care se mişcă rectiliniu uniform unele faţă de altele.

Se observă rolul deosebit pe care-l joacă în natură mişcarea rectilinie uniformă.

5.5. **Forţe complementare.** Forţele pot fi măsurate prin efectele lor statice, de deformare a corpurilor (elastice); prin aceasta măsurarea forţelor este redusă la măsurarea unor lungimi şi durate (coordonatele capetelor alungirii produse trebuie măsurate *simultan*). Deoarece în mecanica clasică lungimile şi duratele (în particular, simultaneitatea) au

Scanned with OKEN Scanner

caracter absolut sau invariant, rezultă că și intensitatea forțelor este aceeași față de diferite SR, adică are un caracter absolut sau invariant.

Legea fundamentală a mecanicii (legea a doua a lui Newton) $\vec{F} = m\vec{a}$, fiind valabilă în SR inerțiale, nu este valabilă în SR neinerțiale, deoarece forța nu se schimbă, în timp ce accelerația se schimbă (masa se consideră o constantă independentă de SR). Să vedem cum trebuie scrisă legea fundamentală într-un SR neinerțial.

Fie mișcarea punctului material raportată la două SR: unul inerțial S față de care accelerația este $\vec{a}_{abs}$, și altul neinerțial S', față de care accelerația aste $\vec{a}_{rel}$:

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{cor}, \quad \vec{a}_{rel} = \vec{a}_{abs} - \vec{a}_{tr} - \vec{a}_{cor}. \tag{5.8}$$

Înmulțind cu masa m, obținem $(\vec{ma}_{abs} = \vec{F})$:

$$\vec{ma}_{rel} = \vec{F} - \vec{ma}_{tr} - \vec{ma}_{cor} = \vec{F} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_{cor} = \vec{F} + \vec{F}_c, \tag{5.9}$$

$$\vec{F}_{tr} = -\vec{ma}_{tr}, \quad \vec{F}_{cor} = -\vec{ma}_{cor}, \quad \vec{F}_c = \vec{F}_{tr} + \vec{F}_{cor}. \tag{5.10}$$

Se vede că pentru a restabili valabilitatea legii fundamentale față de SR *neinerțiale* trebuie să adăugăm la forțele reale $\vec{F}$ niște *forțe complementare*: forța complementară de transport $\vec{F}_{tr} = -\vec{ma}_{tr}$ și forța complementară Coriolis $\vec{F}_{cor} = -\vec{ma}_{cor}$. Aceste forțe au caracter fictiv în mecanica clasică: nu putem indica corpul care le-ar exercita, de aceea nici principiul III al acțiunii și reacțiunii nu se aplică acestor forțe. Forțele complementare se mai numesc pseudoforțe sau forțe de inerție. Nu trebuie să confundăm aceste forțe cu forțele de inerție în sensul lui Newton, adică cu forțele de reacțiune, reale, pe care un corp accelerat le exercită asupra *celorlalte* corpuri (sau „legături") care-l accelerează, drept reacțiune, în virtutea *inerției* sale. Spre deosebire de aceste forțe de inerție newtoniene, exercitate de corp, datorită inerției sale, asupra corpurilor care-l accelerează (față de stele și nebuloase) forțele complementare se consideră aplicate *corpului însuși*.

Scanned with OKEN Scanner

În particular, dacă asupra corpului (punctului material) nu acționează nici o forță reală: $\vec{F} = 0$, $\vec{a}_{abs} = 0$, totuși corpul apare mișcat accelerat față de un SR *neinerțial*, sub acțiunea forței complementare:

$$\begin{aligned} &\vec{a}_{abs} = 0, \qquad \vec{a}_{rel} = -\vec{a}_{tr} - \vec{a}_{cor}, \\ &\vec{F} = 0, \qquad m\vec{a}_{rel} = \vec{F}_c = \vec{F}_{tr} + \vec{F}_{cor}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

Un alt caz particular, important, este cazul unui SC legat rigid de corp, deci mișcat solidar cu corpul. În acest SC, numit *propriu*, corpul este evident în repaus ($\vec{a}_{rel} = 0$), deși asupra lui acționează o forță reală $\vec{F}$:

$$m\vec{a}_{rel} = 0 = \vec{F} + \vec{F}_c, \quad \vec{F}_c = -\vec{F} = -m\vec{a}_{abs}. \tag{5.12}$$

În acest caz forța complementară este egală în modul și de sens opus cu forța reală aplicată. Pentru observatorul neinerțial considerat, aceste forțe își fac echilibru, ca în statică, și corpul (punctul material) este în repaus față de el; problema de dinamică este redusă astfel la o problemă de statică în SR propriu. Pe de altă parte, conform principiului acțiunii și reacțiunii, dacă asupra corpului acționează forța $\vec{F}$, corpul reacționează asupra celorlalte corpuri, datorită inerției sale, cu o forță de inerție newtoniană $\vec{F}'$, egală în modul și de sens opus cu $\vec{F}$: $\vec{F}' = -\vec{F} = -m\vec{a}_{abs} = \vec{F}_c$. Deci, în acest caz, forța complementară aplicată corpului, este egală cu forța de inerție newtoniană exercitată de corp drept reacțiune asupra celorlalte corpuri (legături).

În consecință, putem scrie legea fundamentală a mecanicii în orice SR neinerțial cu condiția ca la forțele reale să adăugăm forțele complementare. Pentru observatorul neinerțial forțele complementare apar ca forțe reale, indiscernabile în cadrul restrîns al laboratorului său de forțele gravitaționale (principiul echivalenței), fiind aplicate fiecărui punct material și proporționale cu masele acestora, ca și forțele gravitaționale. În teoria generală a relativității sau gravitației (A. Einstein, 1916) se face o analiză mai adîncă a forțelor gravitaționale și a forțelor de inerție (a gravitației și inerției), ținînd seama de ansamblul stelelor și nebuloaselor care determină clasa SR inerțiale.

Scanned with OKEN Scanner

5.6 **Exemple.** *a*) Într-un vagon mișcat accelerat se află o bilă netedă, așezată pe o masă netedă, fără frecare, și prinsă cu un resort-dinamometru de peretele vagonului (fig. 5.4). Pentru observatorul terestru S bila se mișcă cu accelerația $\vec{a}$, ca și vagonul ($\vec{a}_{abs} = \vec{a} = \vec{a}_{tr}$), fiind trasă de resort cu forța $\vec{F} = m\vec{a}$. Datorită inerției sale, bila se opune, reacționează asupra resortului cu o forță de inerție newtoniană $\vec{F}' = -\vec{F}$. Pentru observatorul neinerțial S', așezat în vagon, bila este în repaus, deși este trasă de forța $\vec{F}$ indicată de dinamometru. Adăugînd forța complementară de transport $\vec{F}_{tr} = -m\vec{a}$, aplicată bilei, obținem rezultantă nulă $\vec{F} + \vec{F}_{tr} = 0$ și explicăm astfel echilibrul bilei în S' și întinderea resortului. În acest caz S' fiind propriu pentru bilă, $\vec{F}_{tr}$ aplicată bilei este egală cu forța de inerție newtoniană $\vec{F}'$ aplicată resortului.

Tăind firul, bila se va mișca rectiliniu uniform pentru observatorul terestru S, în virtutea inerției, nefiind trasă de nici o forță. Pentru observatorul neinerțial S' din vagon, însă, bila se va mișca cu accele-

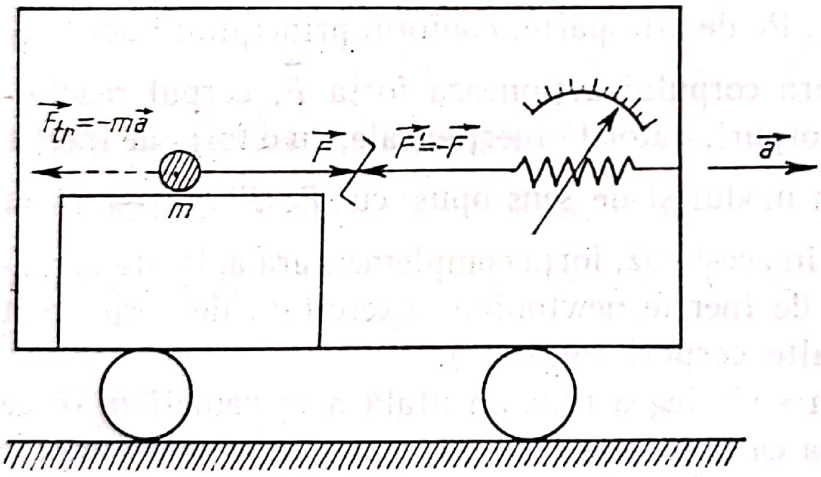


Fig. 5.4. Sistem de referință neinerțial în translație.

rația $\vec{a}_{rel} = -\vec{a}$, și pentru a explica această mișcare accelerată trebuie introdusă aceeași forță complementară de transport $\vec{F}_{tr} = -m\vec{a} = m\vec{a}_{rel}$. De data aceasta nu există forță de inerție newtoniană.

b) Fie un vagon care se rotește uniform în jurul unei axe verticale ($\vec{\omega}$ = const). Pe podeaua netedă, fără frecare, a vagonului este așezată o bilă netedă, în repaus față de Pământ. Pentru observatorul terestru S

greutatea bilei este anulată de reacțiunea normală a podelei și bila rămîne în repaus ($\vec{F} = 0$, $\vec{a}_{abs} = 0$). Pentru observatorul neinerțial S', așezat în vagon, bila se rotește circular uniform în sens invers vagonului. Pentru a explica aceasta în S' trebuie introduse forțele complementare: de transport centrifugă $F_{tr} = m\omega^2 R$ ($\vec{a}_{tr}$ este centripetă, însă $\vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_{tr}$) și Coriolis centripetă $F_{cor} = 2m\omega v_{rel} = 2m\omega^2 R$ ($\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ este centrifugă, însă $\vec{F}_{cor} = -m\vec{a}_{cor}$). Forța complementară rezultantă este centripetă: $F_c = m\omega^2 R$ și explică astfel mișcarea circulară uniformă a bilei în S'. Nu există forță de inerție newtoniană ($\vec{a}_{abs} = 0$).

Dacă acum bila este legată de centru (axă) printr-un fir cu resort-dinamometru și este în repaus față de vagon (fig. 5.5), atunci față de Pămînt (S) bila se mișcă circular uniform fiind trasă de resort cu forța centripetă $F = ma_{abs} = m\omega^2 R$. Datorită inerției bila reacționează asupra

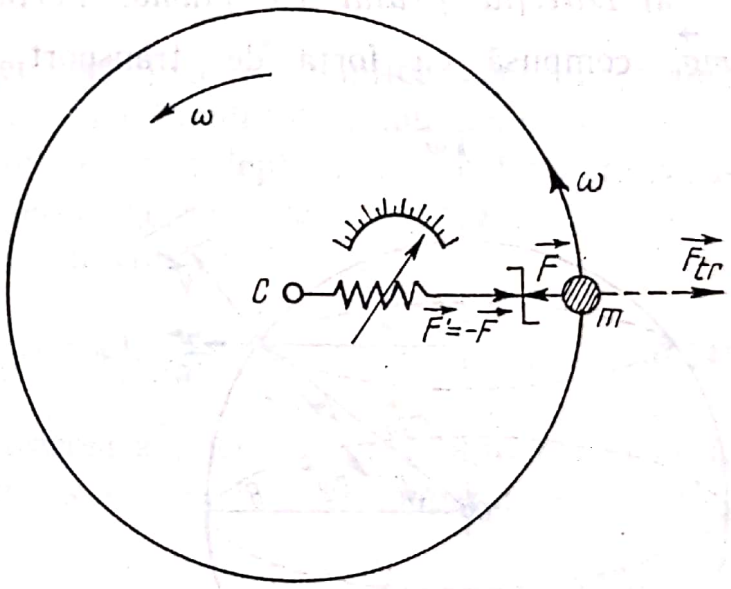


Fig. 5.5. Sistem de referință neinerțial în rotație uniformă.

resortului cu o forță de inerție newtoniană centrifugă $\vec{F}' = -\vec{F}$. Pentru observatorul neinerțial S', așezat în vagon, bila este în repaus, deși este trasă centripet de resort cu forța $\vec{F}$. Pentru a explica echilibrul în S' introducem forța complementară de transport centrifugă ca mai înainte ($F_{cor} = 0$ deoarece $v_{rel} = 0$) care compensează forța centripetă dată de resort. În acest caz, S' fiind propriu pentru bilă ($a_{rel} = 0$), $\vec{F}_{tr}$ aplicată

Scanned with OKEN Scanner

bilei este egală cu forța de inerție newtoniană $\vec{F}' = -\vec{F}$ aplicată resortului.

5.7. **Aplicații la mișcarea de rotație a Pământului.** Pământul nu constituie riguros un SR inerțial, din cauza rotației sale diurne față de stele cu viteza unghiulară $\omega = 2\pi/T = 6{,}28/24 \text{ h} = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Din cauza vitezei de rotație mici, în majoritatea problemelor efectele acestei rotații pot fi neglijate, considerînd că Pământul este aproximativ un SR inerțial.

Dacă studiem mișcarea corpurilor față de Pământ, trebuie să introducem forțele complementare: de transport centrifugă $F_{tr} = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\varphi$, unde $r = R\cos\varphi$ este raza cercului paralel terestru la latitudinea φ și $R = 6380$ km — raza Pământului (fig. 5.6), și forța Coriolis dacă $v_{rel}^{\perp} \neq 0$, adică dacă corpul se depărtează de axa de rotație S—N a Pământului.

a) *Direcția firului cu plumb.* Forța de atracție gravitațională $m\vec{g}_0$ compusă cu forța de transport centrifugă $\vec{F}_{tr}$ de modul

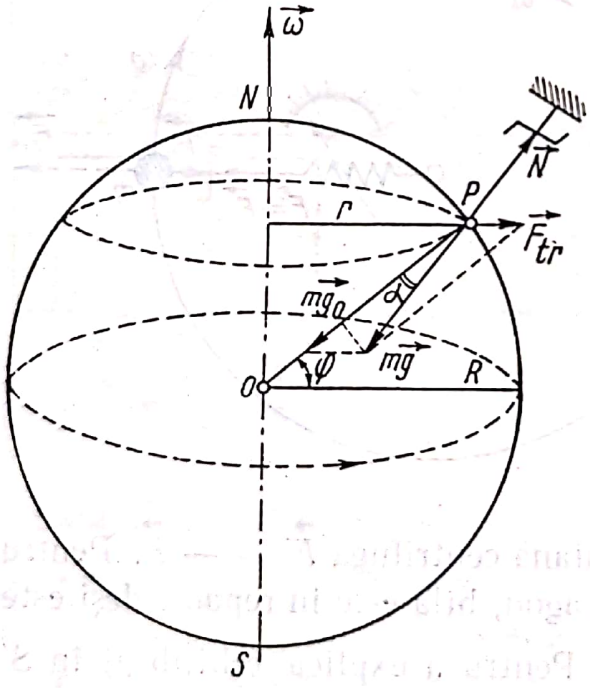


Fig. 5.6. Direcția firului cu plumb sau a greutății aparente nu coincide cu raza terestră respectivă din cauza rotației Pământului.

$F_{tr} = m\omega^2 R\cos\varphi$ ($F_{cor} = 0$) este echilibrată de forța de tensiune din firul de suspensie, dacă corpul este atîrnat, sau de reacțiunea $\vec{N}$ a planului neted

Scanned with OKEN Scanner

dacă corpul este așezat. Prin urmare, rezultanta celor două forțe ne dă greutatea aparentă $\vec{mg}$ a corpului și direcția firului cu plumb:

$$\vec{mg_0} + \vec{N} + \vec{F}_{tr} = m\vec{a}_{rel} = 0, \quad \vec{mg} = -\vec{N} = \vec{mg_0} + \vec{F}_{tr}.$$

Pentru observatorul inerțial corpul se mișcă circular uniform, anume forța gravitațională $\vec{mg_0}$ compusă cu reacțiunea $\vec{N}$ dă o rezultantă centripetă egală cu masa ori accelerația centripetă.

Din figură, proiectînd ultima relație pe direcția razei OP, rezultă

$$mg = \frac{mg_0 - F_{tr}\cos\varphi}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{tr}\sin\varphi}{mg_0 - F_{tr}\cos\varphi}.$$

Deoarece unghiul de deviere α este foarte mic, $\cos\alpha \approx 1$, $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ (în rad) și putem scrie:

$$g = g_0\left(1 - \frac{1}{g_0}\omega^2 R\cos^2\varphi\right), \quad \alpha^{(\text{rad})} \approx \frac{F_{tr}\sin\varphi}{mg_0} = \frac{\omega^2 R}{2g_0}\sin 2\varphi. \qquad (5.13)$$

Componenta verticală a forței centrifuge $\vec{F}_{tr}$ explică deci micșorarea greutății corpurilor datorită rotației Pămîntului, iar componenta orizontală, îndreptată spre ecuator, explică deplasarea maselor spre ecuator și turtirea Pămîntului la Poli. Ținînd seama și de efectul turtirii Pămîntului, rezultă global, la nivelul mării:

$$g = 9{,}832\left(1 - \frac{1}{191}\cos^2\varphi\right), \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad \alpha^{(\prime\prime)} \approx 9\sin 2\varphi, \qquad (5.14)$$

unde $g_P = 9{,}832$ m/s² este valoarea accelerației gravitaționale la Poli. Deviația α este maximă pentru $\sin 2\varphi = 1$, deci la paralela $\varphi = 45°$, unde $\alpha \approx 9''$.

b) *Căderea liberă.* Un corp lăsat liber în vid nu cade în direcția firului cu plumb, adică în direcția greutății aparente, ci este deviat spre răsărit. Aceasta se explică prin efectul forței Coriolis $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ care este orientată spre răsărit. Pentru observatorul solar, corpul, avînd inițial o viteză de transport tangențială de-a lungul cercului paralel, coboară spre Pămînt unde această viteză este mai mică, deci vine cu un surplus (exces) de viteză spre răsărit, deci cade deviat spre răsărit. De exemplu, pentru o înălțime de cădere $h = 1$ km, la latitudinea

Scanned with OKEN Scanner

$\varphi = 45°$, deviația este de ≈ 40 cm. Experiențele (Reich, 1831) confirmă această deviere, și deci rotația Pământului.

c) *Pendulul Foucault*. O altă experiență celebră este rotația planului de oscilație al unui pendul (Foucault, 1850, și alte experiențe anterioare). Pentru oscilații mici, mișcarea greutății pendulului se face practic în planul orizontal. Atunci forța Coriolis $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ deviază corpul mereu spre dreapta, astfel încît el descrie o rozetă. Pentru

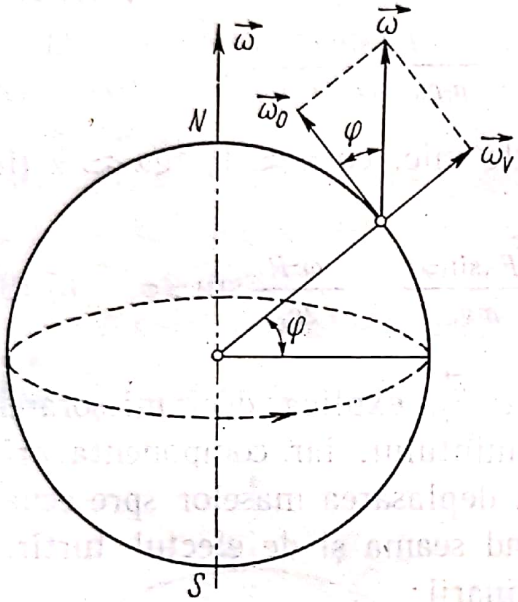


Fig. 5.7. Componenta verticală a vitezei unghiulare de rotație a Pământului $\omega_v = \omega \sin\varphi$ rotește podeaua laboratorului în sens trigonometric (în emisfera nordică) și explică astfel devierea aparentă spre dreapta a greutății pendulului adică rotația planului său de oscilație. Componenta orizontală $\omega_0 = \omega\cos\varphi$ rotește planul meridian (planul vertical S-N) după axa S—N și explică astfel devierea spre est a corpurilor în căderea liberă.

observatorul solar componenta verticală a vitezei unghiulare de rotație a Pământului, $\omega_v = \omega \sin\varphi$, rotește planul orizontal (podeaua laboratorului) în jurul verticalei, în sens trigonometric, în emisfera nordică, cu perioada $T_v = 2\pi/\omega_v = 2\pi/\omega\sin\varphi = T/\sin\varphi$ ($T = 2\pi/\omega = 24$ h), de aceea planul de oscilație al pendulului se rotește aparent în sens invers cu această perioadă (fig. 5.7).

d) *Legea lui Bär*. S-a constatat că rîurile (siberiene) care curg în direcția meridianului sapă mai pronunțat malul drept decît pe cel stîng (în emisfera nordică). Aceasta se explică prin efectul forței Coriolis orientată spre dreapta. La fel se explică uzajul șinei drepte la căile ferate duble. Pentru observatorul solar, fenomenul se explică analog căderii libere: dacă rîul curge spre Nord, de exemplu, atunci apa se deplasează mereu spre regiuni unde viteza liniară tangențială a Pământului este tot

Scanned with OKEN Scanner

mai mică, deci vine cu un surplus (exces) de viteză spre răsărit și lovește malul răsăritean, în emisfera nordică.

În cazul mișcării de-a lungul unei paralele terestre forța Coriolis dă o micșorare sau creștere a greutății aparente și de asemenea uzajul șinei drepte sau săparea malului drept (în emisfera nordică).

5.8. **Probleme rezolvate.** Multe probleme se rezolvă comod într-un SR neinerțial.

a) Cu ce accelerație orizontală minimă trebuie împins un plan înclinat, de unghi $\alpha = 45°$, pentru ca un corp așezat pe el, cu coeficientul de frecare $\mu = 0{,}2$, să înceapă să urce pe plan?

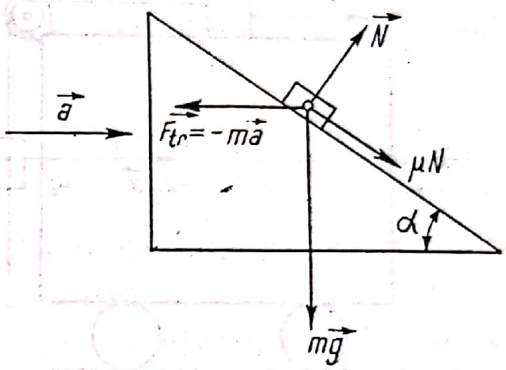


Fig. 5.8. Corpul poate urca pe un plan înclinat dacă acesta este mișcat accelerat în direcție orizontală (dacă $\mu < \mathrm{ctg}\alpha$).

Considerăm cazul limită cînd corpul începe să lunece în sus pe plan. Trecem la SR legat rigid de planul înclinat, deci mișcat solidar cu acesta. Atunci trebuie să introducem forța complementară de transport $\vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_{tr} = -m\vec{a}$ (fig. 5.8). Avem pe cele două direcții:

$N - mg\cos\alpha - F_{tr}\sin\alpha = 0$, $F_{tr}\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu N = 0$, $F_{tr} = ma$, din care rezultă:

$$a = g\frac{\mu + \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mu\mathrm{tg}\alpha} = \frac{3}{2}g.$$

Problema este posibilă dacă $\mu < \mathrm{ctg}\alpha$. Introducînd unghiul de frecare, $\mu = \mathrm{tg}\varphi$, putem scrie $a = g\,\mathrm{tg}(\alpha + \varphi)$.

b) Pe un bloc este așezată o masă m_1 cu coeficientul de frecare μ_1, prinsă printr-un fir orizontal, trecut peste un scripete imponderabil, de o altă masă m_2 care se poate atinge de fața laterală a blocului cu coeficientul de frecare μ_2, ca în figura 5.9. Cu ce accelerație orizontală minimă trebuie împins blocul pentru ca m_2: 1) să nu cadă, 2) să înceapă să urce?

Dacă m_2 lăsat liber cade, înseamnă că $m_2 > \mu_1 m_1$. Considerînd ansamblul $m_1 + m_2$ (scripetele ideal schimbă convenabil direcţia forţei), avem în primul caz (forţele de frecare se opun căderii lui m_2):

$$m_2 g - \mu_2 m_2 a - m_1 a - \mu_1 m_1 g = 0,$$

$$a = g \frac{m_2 - \mu_1 m_1}{m_1 + \mu_2 m_2}.$$

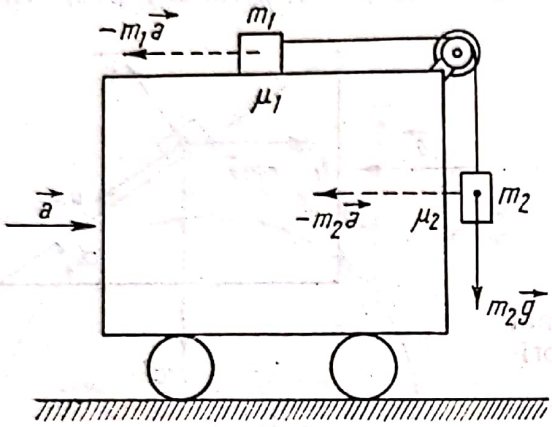


Fig. 5.9. Masa m_2 poate sta în echilibru relativ sau chiar urca dacă blocul este împins accelerat.

În al doilea caz (forţele de frecare se opun urcării lui m_2):

$$m_1 a - \mu_1 m_1 g - m_2 g - \mu_2 m_2 a = 0,$$

$$a = g \frac{m_2 + \mu_1 m_1}{m_1 - \mu_2 m_2}.$$

Urcarea este posibilă dacă $m_1 > \mu_2 m_2$.

Probleme

5.1. Care trebuie să fie durata unei zile pentru ca corpurile la ecuator să nu aibă greutate aparentă?

Răspuns: $T = 2\pi\sqrt{R/g} = 1$ h 25 min.

5.2. O locomotivă de masă $m = 20$ t circulă între două oraşe de-a lungul unui arc paralel terestru (spre Est sau Vest) la latitudinea nordică $\varphi = 45°$, cu viteza constantă $v = 72$ km/h. Să se calculeze componentele orizontală şi verticală ale forţei de apăsare suplimentare,

exercitată de locomotivă asupra șinelor datorită rotației diurne a Pămîntului.

Răspuns: $N_v = -m\dfrac{4\pi^2}{T^2}R\cos^2\varphi \mp 2m\dfrac{2\pi}{T}v\cos\varphi = -85 \mp 13$ N,

$$N_o = N_v \operatorname{tg}\varphi = -85 \mp 13 \text{ N}.$$

82- Ghegh.

5.3. De tavanul unui lift, mișcat cu accelerația $a = 1{,}2$ m/s² îndreptată în sus, este agățat un dinamometru de care este atîrnat un scripete de masă neglijabilă. Peste scripete este trecut un fir cu două greutăți $m_1 = 0{,}2$ kg, $m_2 = 0{,}3$ kg legate la capete. Ce forță indică dinamometrul în timpul mișcării greutăților?

Răspuns: $F = \dfrac{4\,m_1 m_2\,(g+a)}{m_1+m_2} = 5{,}28$ N.

5.4. Un corp este așezat pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$, cu coeficientul de frecare $\mu = 0{,}2$. Cu ce accelerație se va mișca corpul de-a lungul planului înclinat dacă i se imprimă planului înclinat o accelerație $a = 3{,}8$ m/s² îndreptată vertical în sus sau în jos?

Răspuns : $a' = (g \pm a)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 4{,}25$ sau $8{,}75$ m/s².

5.5. Un plan înclinat de unghi α este mișcat orizontal cu accelerația a, într-un sens sau altul. Care este coeficientul de frecare μ minim necesar pentru ca un corp așezat pe plan să rămînă în repaus față de plan?

Răspuns: $\mu \geqslant \dfrac{|g\operatorname{tg}\alpha - a|}{g + a\operatorname{tg}\alpha}$ sau $\mu \geqslant \dfrac{g\operatorname{tg}\alpha + a}{g - a\operatorname{tg}\alpha}$ $(a < g\operatorname{ctg}\alpha)$.

BIBLIOTECA PERSONALĂ
Nr. .....
Carmen Antonovici

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI

Gravitația universală

6.1 Evoluția istorică a ideilor despre univers

Observarea aștrilor și studiul mișcării lor a preocupat gîndirea umană, de milenii. S-a născut astfel știința, numită *astronomie*, care studiază toate corpurile exterioare Pămîntului (numite aștri) sau mai general întreg spațiul în care se află aceste corpuri, numit *Univers*. Astronomia studiază pozițiile, mișcările, structurile, compozițiile, interacțiunile și evoluția aștrilor, structura sistemelor de aștri și a Universului.

Fig. 6.1. Fotografie luată cu un aparat al cărui obiectiv a fost îndreptat spre Steaua Polară. Arcele de cerc arată mișcarea aparentă a stelelor. Această mișcare circulară i-a determinat pe grecii antici să creadă că stelele sînt fixe pe o sferă care se rotește în jurul Pămîntului.

Fondul pe care se văd aștrii se numește cer. Numeroasele stele pe care le vedem pe cer și mai ales puzderia de stele din Calea laptelui, formează împreună un sistem uriaș, numit *Galaxie*. În Galaxie există

Scanned with OKEN Scanner

aproape 150 miliarde de stele (printre care și soarele nostru). Acesteia îi spunem Galaxia noastră. Dincolo de Galaxia noastră există o lume infinită de galaxii dintre cele mai variate. Cu ajutorul unor instrumente astronomice foarte perfecționate, au fost observate peste un miliard de galaxii. Acestea nu reprezintă decît o parte din universul nesfîrșit și veșnic.

Legile de mișcare a aștrilor au fost descoperite progresiv, studiindu-se mai întîi o mică parte din Univers, numită sistem solar, compusă din Soare, un număr mic de corpuri care se rotesc în jurul Soarelui numite planete (de la cuvîntul grecesc „rătăcitor"), comete, corpuri meteorice, gazul și pulberea interplanetare.

Lumea antică, avidă să cunoască, a făcut observații astronomice sistematice, cu 2000 ani î.e.n. Grecii antici au pus bazele științifice ale astronomiei. De la aceștia au rămas unele concepții corecte despre forma Pămîntului și natura mișcării acestuia și despre modul de dispunere a planetelor și stelelor în univers, numit *sistemul lumii*. Astfel, astronomul grec Aristarh din Samos a susținut că Pămîntul este rotund și se mișcă în jurul axei sale și în jurul Soarelui. Însă de la astronomii greci au rămas și unele concepții greșite care au constituit un regres pentru știință. Astfel, este concepția astronomului grec Ptolomeu (secolul al II-lea al erei noastre) care susținea că sistemul lumii este alcătuit astfel: în centrul universului se află Pămîntul imobil, în jurul căruia se rotesc Soarele, planetele și stelele. Aceasta s-a numit concepția geocentrică asupra sistemului lumii, concepție răspîndită pînă tîrziu în evul mediu, fiind susținută de către reprezentanții bisericii ca fiind pe deplin corespunzătoare alcătuirii „divine" a lumii și deci „sfîntă". Pentru știință sistemul geocentric al lumii a reprezentat un pas înapoi.

Astronomul polonez N. Copernic (1473—1543) a demonstrat, contrar ideilor admise pînă atunci, că Soarele se găsește în centrul sistemului planetar, Pămîntul și celelalte planete rotindu-se în jurul său. Astfel Copernic a fundamentat sistemul heliocentric al lumii.

Sistemul heliocentric a fost susținut cu mult succes de către Galileo Galilei (1564—1642) în lucrarea sa „Dialog asupra celor două sisteme principale ale lumii, ptolemeic și copernician". Astronomia cîștigă noi poziții avansate prin epocalele descoperiri ale lui Galilei, printre care

Scanned with OKEN Scanner

și luneta care-i poartă numele. Galilei cu luneta construită de el verifică în practică concluziile deduse matematic de către Copernic.

În apărarea noilor teorii despre alcătuirea universului se alătură și filozoful italian Giordano Bruno (1550—1600). Acesta a arătat că Universul este infinit și că în cuprinsul său se găsesc multe alte stele în jurul cărora se învîrtesc planete asemănătoare celor din sistemul nostru solar.

Folosindu-se de observațiile astronomului danez Tycho-Brahé (1546—1601), astronomul german Johann Kepler (1571—1630) a stabilit legile mișcării planetelor din sistemul solar; acestea sînt:

1. Planetele în mișcarea lor în jurul Soarelui descriu traiectorii eliptice, Soarele fiind în unul din focarele elipsei.

În mișcarea sa pe orbită, fiecare planetă se află la un moment dat la o depărtare minimă de Soare (periheliu), iar în alt moment, la o distanță maximă de Soare (afeliu).

2. Raza vectoare Soare-planetă mătură arii egale în timpuri egale.

Planetele mergînd spre periheliu, își accelerează mișcarea, ating o viteză maximă în acest punct, după care, îndepărtîndu-se spre afeliu

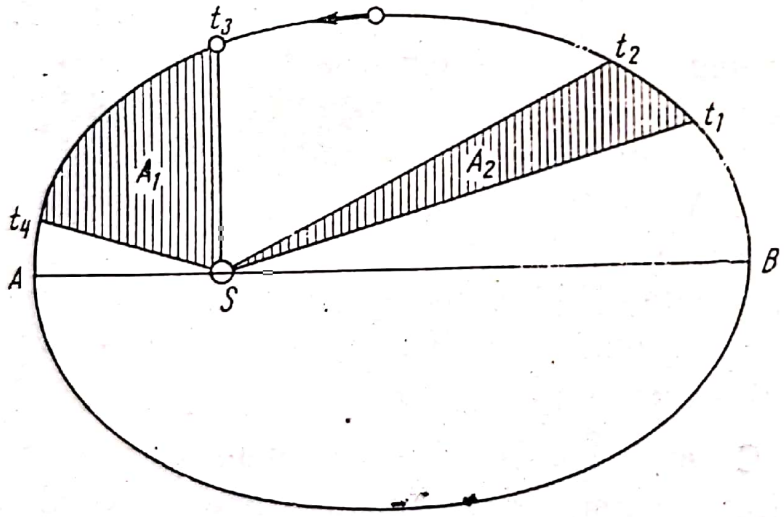


Fig. 6.2. Legile lui Kepler. Pămîntul descrie orbita sa eliptică cu o viteză variabilă. În *B* viteza sa este minimă iar în *A* este maximă. În intervalele de timp egale $t_2—t_1=t_4—t_3$, ariile măturate de raza vectoare Soare Pămînt sînt egale ($A_1=A_2$). În realitate elipsa este foarte puțin turtită și pentru simplificare o putem aproxima cu un cerc.

(punctul extrem opus) își încetinesc mișcarea orbitală, la afeliu orice planetă are cea mai mică viteză.

3. Raportul dintre pătratul perioadei de revoluție (timpul în care planetele descriu odată în întregime elipsa) și cubul semiaxei mari a orbitei este același pentru toate planetele: $\frac{T^2}{a^3}$ = constant.

Scanned with OKEN Scanner

În tabelul de mai jos dăm cîteva date referitoare la sistemul solar.

Corpul	Masa (kg)	Raza (m)	Perioada de rotație (s)	Raza medie a orbitei (m)	Perioada de revoluție (s)
Soarele	$1{,}98.10^{30}$	$6{,}95.10^{8}$	$2{,}14.10^{6}$	—	—
Mercur	$3{,}28.10^{23}$	$2{,}57.10^{6}$	$7{,}60.10^{6}$	$5{,}79.10^{10}$	$7{,}60.10^{6}$
Venus	$4{,}83.10^{26}$	$6{,}31.10^{6}$	$2{,}6\ .10^{6}$	$1{,}08.10^{11}$	$1{,}94.10^{7}$
Pămîntul	$5{,}98.10^{24}$	$6{,}38.10^{6}$	$8{,}61.10^{4}$	$1{,}49.10^{11}$	$3{,}16.10^{7}$
Marte	$6{,}37.10^{23}$	$3{,}43.10^{6}$	$8{,}85.10^{4}$	$2{,}28.10^{11}$	$5{,}94.10^{7}$
Jupiter	$1{,}90.10^{27}$	$7{,}18.10^{7}$	$3{,}54.10^{4}$	$7.78.10^{11}$	$3{,}74.10^{8}$
Saturn	$5{,}67.10^{26}$	$6{,}03{,}10^{7}$	$3{,}60.10^{4}$	$7{,}43.10^{12}$	$9{,}30.10^{8}$
Uranus	$8{,}80.10^{25}$	$2{,}67.10^{7}$	$3{,}88.10^{4}$	$2{,}87.10^{12}$	$2{,}66.10^{9}$
Neptun	$1{,}03.10^{26}$	$2{,}48.10^{7}$	$5{,}69.10^{4}$	$4{,}50.10^{12}$	$5{,}20.10^{9}$
Pluton	?	?	?	$5{,}9\ .10^{12}$	$7{,}82.10^{9}$
Luna	$7{,}34.10^{22}$	$1{,}74.10^{6}$	$2{,}36.10^{6}$	$3{,}8\ .10^{8}$	$2{,}36.10^{6}$

Analizînd datele tabelului rezultă că masele planetelor reprezintă numai 1/750 din masa Soarelui. Distanțele planetelor față de Soare sînt foarte mari.

Pentru a ne face o idee mai concretă despre mărimea planetelor în comparație cu Soarele și despre distanțele lor față de Soare am reprezentat sistemul solar la o anumită scară aleasă arbitar, iar rezultatul l-am dat în tabelul de mai jos:

Modelul la scară al sistemului solar:

Corpul din sistemul solar	Corpul din model	Distanța față de „Soare" în metri
Soarele	minge de baschet	—
Mercur	jumătate gămălie de ac	13
Venus	bob de linte	25
Pămîntul	bob de linte	34
Marte	bob de linte mic	52
Jupiter	minge de tenis	180
Saturn	minge de ping pong	320
Uranus	alună	650
Neptun	alună	1 000
Pluton	—	1 300

Pentru a obține adevăratele dimensiuni ale sistemului solar, fiecare dimensiune trebuie multiplicată cu $4{,}4.10^{9}$.

Scanned with OKEN Scanner

Din cele discutate pînă aici, rezultă că s-a precizat tot mai mult natura, structura și întinderea sistemului solar, s-au descoperit legile fundamentale ale mișcării sistemului solar. Nu s-a precizat nimic în legătură cu interacțiunile dintre corpurile care alcătuiesc sistemul solar. Nu s-a arătat cum este asigurată stabilitatea sistemului solar și care sînt cauzele mișcării planetelor în jurul Soarelui.

Savantului englez Isaac Newton (1643—1727) îi datorăm descoperirea adevărului, din care să rezulte cauzele căderii libere a corpurilor pe suprafața Pămîntului, mișcării planetelor în jurul Soarelui, formării mareelor, adunării laolaltă a 150 miliarde de stele în Galaxie. Aceste fenomene aparent de naturi diferite, sînt manifestări ale aceleiași legi: legea gravitației universale, descoperită în anul 1666 de către Isaac Newton.

Potrivit legii gravitației universale, toate corpurile din univer interacționează prin forțe de atracție, fie că este vorba despre particule de nisip, despre blocuri de piatră sau despre aștri.

Legea gravitației universale a dat răspuns la toate problemele importante legate de mișcarea corpurilor cerești.

Avînd în vedere dimensiunile mici ale aștrilor față de distanțele dintre ele, Newton le-a considerat puncte materiale. Pornind de la abstracția punctului material, Newton a elaborat o teorie matematică a gravitației universale, care descrie cu un aparat matematic minimal și cu o surprinzătoare precizie, mișcarea corpurilor cerești. În felul acesta Newton a pus bazele mecanicii cerești, dînd o imagine nouă despre univers. Legile lui Kepler sînt simple consecințe ale legii gravitației universale.

Ceea ce determină o planetă să se rotească în jurul Soarelui este forța de atracție reciprocă dintre Soare și planetă. Pe de o parte atracția exercitată de Soare reține planeta în jurul acestuia, împiedicînd-o să se îndepărteze în spațiul cosmic, iar pe de altă parte datorită inerției, planeta tinde mereu să se miște rectiliniu uniform, deci să se îndepărteze de Soare; planeta este obligată în felul acesta să se deplaseze pe traiectoria sa. La fel se întîmplă și cu Luna care se mișcă în jurul Pămîntului și odată cu acesta în jurul Soarelui. Soarele, împreună cu sistemul solar, se mișcă în Galaxie datorită aceleiași legi a gravitației universale.

Prin descoperirea legii gravitației universale Newton a arătat care sînt cauzele stabilității sistemului solar. Pînă la el pozițiile planetelor

Scanned with OKEN Scanner

erau considerate ca fiind o manifestare directă a unei închipuite forțe supranaturale. Prin descoperirea sa Newton a dovedit că cerul nu ascunde minuni, ci doar fenomene ce pot fi explicate, cunoscînd legile care le guvernează.

6.2. **Greutatea corpurilor.** Corpurile cad spre Pămînt ca un efect al gravitației universale. Forța de atracție gravitațională care acționează asupra unei particule (punct material) de masă m în apropierea suprafeței Pămîntului se numește greutatea particulei și conform legii a doua a dinamicii este dată de expresia:

$$\vec{G} = m\vec{g}, \tag{6.1}$$

$\vec{g}$ este accelerația gravitațională care variază cu altitudinea, latitudinea și mișcarea diurnă.

În cele ce urmează vom ține seama că atracția Pămîntului asupra oricărui corp din exteriorul său echivalează cu atracția unei particule aflată în centrul Pămîntului și care ar avea masa egală cu masa totală a Pămîntului

6.3. **Legea gravitației universale.** Să considerăm două corpuri cerești ce interacționează: Soarele și o planetă oarecare, pe care le considerăm puncte materiale.

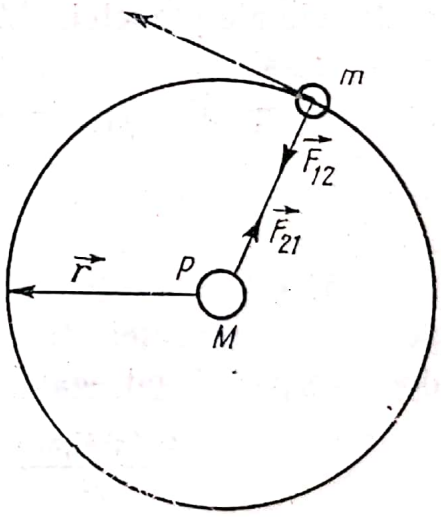


Fig. 6.3. Interacțiunea dintre Soare și una dintre planete se manifestă prin forțe de atracție egale în modul și opuse ca sens. Acestea sînt forțe interne ale sistemului Soare-planetă și conform principiului acțiunii și reacțiunii satisfac relația $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$.

Datorită interacțiunii gravitaționale planeta se mișcă în jurul Soarelui pe o traiectorie pe care o vom presupune circulară, cu vitezele liniară și unghiulară constante (conform legii a II-a a lui Kepler), deci este supusă acțiunii unei forțe centripete de mărime:

$$F_{12} = ma_c, \tag{6.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde m este masa planetei, iar

$$a_c = \omega^2 r = 4\pi^2 r/T^2. \tag{6.3}$$

Am notat cu r raza traiectoriei planetei măsurată de la centrul Soarelui, iar cu T perioada de rotație a planetei în jurul Soarelui. Folosind legea a III-a a lui Kepler, care, în cazul unei traiectorii circulare este dată de expresia

$$\frac{r^3}{T^2} = K_1 \quad \text{sau} \quad \frac{r}{T^2} = \frac{K_1}{r^2}, \tag{6.4}$$

unde K_1 este o constantă, și înlocuind expresia (6.4) în (6.3) obținem

$$a_c = \frac{4\pi^2 K_1}{r^2}. \tag{6.5}$$

Substituind valoarea lui a_c în (6.2) obținem

$$F_{12} = \frac{4\pi^2 K_1 m}{r_2}. \tag{6.6}$$

Se vede din (6.6) că forța de atracție F_{12} este proporțională cu masa corpului atras și invers proporțională cu pătratul distanței dintre cele două corpuri. Constanta K_1 depinde numai de proprietățile Soarelui nu și de cele ale planetei. Atracția dintre cele două corpuri fiind reciprocă, și cel de-al doilea corp îl atrage pe primul cu o forță proporțională cu masa primului corp:

$$F_{21} = \frac{4\pi^2 K_2 M}{r^2}, \tag{6.7}$$

unde M este masa Soarelui și K_2 este o constantă care depinde numai de natura planetei. Intensitățile forțelor de interacțiune dintre cele două corpuri fiind egale, obținem:

$$\frac{4\pi^2 K_1 m}{r^2} = \frac{4\pi^2 K_2 M}{r^2} \quad \text{de unde} \quad \frac{K_1}{M} = \frac{K_2}{m} \tag{6.8}$$

Raportul (6.8) are aceeași valoare pentru ambele corpuri (Soare și planetă), deci pentru toate corpurile în general. Notînd cu C valoarea acestui raport, rezultă $K_1 = CM$ și $K_2 = Cm$, iar

$$F_{12} = \frac{4\pi^2 CMm}{r^2} \quad \text{și} \quad F_{21} = \frac{4\pi^2 CMm}{r^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Factorul de proporţionalitate $4\pi^2 C$ se notează cu γ şi se numeşte *constantă gravitaţională*. Constanta γ este o constantă universală. Astfel legea gravitaţiei universale capătă forma

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2} \tag{6.9}$$

sau

$$\vec{F} = -\frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \tag{6.10}$$

Semnul minus indică caracterul atractiv al forţei, $\vec{r}$ fiind vectorul de poziţie de la corpul atractiv la cel atras. Aşadar, *forţa de atracţie gravitaţională dintre două corpuri punctiforme este direct proporţională cu produsul maselor şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele.* Forţa de interacţiune gravitaţională nu depinde de compoziţia chimică a corpurilor, de sarcinile lor electrice sau de starea lor de agregare. Forţele interacţiunii gravitaţionale depind de masa corpurilor, care pe lîngă proprietăţi inerţiale mai determină şi proprietăţi gravifice.

6.4. **Constanta gravitaţională.** Factorul γ din relaţia (6.10), care nu depinde de masa corpurilor care interacţionează se numeşte constanta gravitaţională. Constanta gravitaţională are dimensiunile

$$[\gamma] = \frac{[F]\,[r]^2}{]m[^2} = L^3 M^{-1} T^{-2} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}.$$

Valoarea constantei gravitaţionale este $\gamma = (6{,}670 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$. Valoarea foarte mică a constantei gravitaţionale arată că atracţia gravitaţională devine apreciabilă numai în cazul corpurilor cu masa foarte mare. Forţa de interacţiune gravitaţională dintre Pămînt şi Lună este $F = 2 \cdot 10^{20}$ N, iar forţa de interacţiune gravitaţională dintre două corpuri, fiecare cu masa de 1 000 kg, aflate la distanţa de 1 m unul de altul, este $F = 6{,}7 \cdot 10^{-5}$ N.

6.5. **Măsurarea constantei gravitaţionale.** Constanta gravitaţională a fost determinată experimental, pentru prima dată de către fizicianul englez Cavendish (1751—1810). El a folosit un aparat alcătuit din două sfere de plumb identice (fiecare cu masa $M = 158$ kg), aşezate pe un suport ce se poate roti într-un plan orizontal şi din două sfere mici din platină cu acelaşi diametru (fiecare cu masa $m = 0{,}73$ kg), prinse la

Scanned with OKEN Scanner

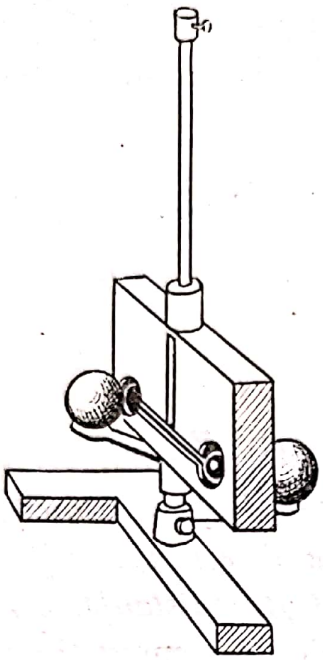


Fig. 6.4. Aparatul lui Cavendish folosit pentru determinarea constantei gravitației.

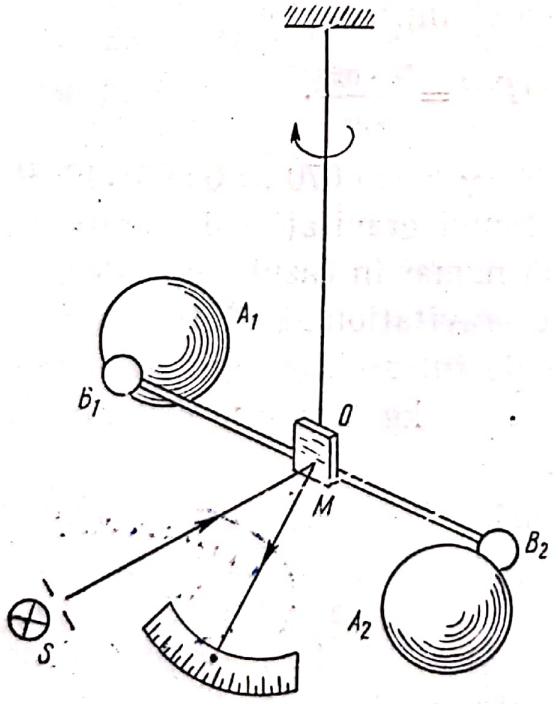


Fig. 6.5. Schema simplificată a aparatului lui Cavendish.

capetele unei tije orizontale, care este suspendată de mijlocul său cu un fir elastic (fig. 6.4 și 6.5).

Bilele mici împreună cu sistemul de suspensie formează echipajul mobil al aparatului. Pe firul de suspensie se așază o oglindă mică O, pe care se reflectă o rază de lumină provenită de la o sursă luminoasă. Raza este trimisă după reflexie pe o riglă transparentă gradată, unde formează un spot luminos. Sistemul oglindă-riglă gradată permite să se măsoare unghiul de rotație al echipajului mobil (prin metoda Pogendorff).

Pentru determinarea constantei γ, se așază mai întîi bilele de plumb în poziția A_1, A_2 (fig. 6.6) și se notează poziția spotului pe rigla gradată. După aceea se așază bilele de plumb în poziția A_1', A_2' simetrică în raport cu poziția de echilibru B_1, B_2, în absența atracției. Echipajul mobil se rotește cu unghiul 2α. În timpul rotirii echipajului mobil, firul elastic se răsucește. În fir ia naștere un cuplu de forțe elastice care prin momentul său se opune răsucirii firului. Momentul acestui cuplu este proporțional cu unghiul pe care-l face tija de care sînt prinse bilele mici cu poziția de echilibru B_1B_2. La echilibru, momentul forțelor elastice $C\alpha$ este egal cu momentul forțelor de atracție: $C\alpha = F \cdot B_1B_2 \cos\alpha \simeq F \cdot B_1B_2$ ($F = F_1 = F_2$, $\cos\alpha \approx 1$, α

Scanned with OKEN Scanner

fiind mic). Măsurînd unghiul α determinăm pe F. Cunoscînd F, m, M, $d = B_1'A_1 = B_2'A_2$, legea gravitației universale $F = \gamma \frac{mM}{d^2}$ permite calcularea constantei gravitaționale

$$\gamma = \frac{Fd^2}{mM}.$$

Constanta gravitațională nu depinde nici de natura corpurilor care interacționează, nici de locul și timpul cînd a fost efectuată experiența, deci este o constantă universală.

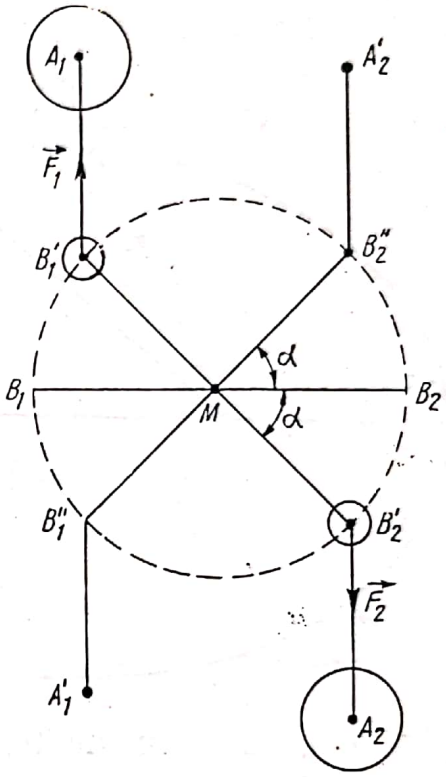


Fig. 6.6. Reprezentarea schematică a experienței efectuate cu aparatul lui Cavendish.

6.6. **Deducerea legilor lui Kepler.** Masele planetelor fiind foarte mici în raport cu masa Soarelui, forțele de interacțiune gravitațională dintre planete sînt de asemenea foarte mici, în comparație cu forța de interacțiune dintre Soare și planete. Rezultă că, cu o anumită aproximație, sistemul format din fiecare planetă și Soare poate fi considerat un sistem izolat. Vom considera Soarele fix (în SR inerțial) deși în realitate și Soarele și planeta se mișcă în jurul centrului de masă comun, care practic coincide cu centrul Soarelui.

Admițînd valabilă prima lege a lui Kepler, vom deduce legea a doua, aplicînd legea conservării momentului cinetic al sistemului Soare-planetă.

Momentul cinetic al planetei cu masa m, ce se mișcă pe o traiectorie eliptică în jurul Soarelui, la momentul cînd trece printr-un punct A, unde are viteza $\vec{v}$, este:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v},$$

unde $\vec{r}$ este raza vectoare Soare-planetă.

Nr.
Carmen Antonovici

Conform teoremei variației momentului cinetic $\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}$,

Scanned with OKEN Scanner

unde $\vec{M}$ este momentul forței $\vec{F}$ care acționează asupra planetei în raport cu același pol S.

Forța $\vec{F}$ care acționează asupra planetei trece invariabil prin punctul S

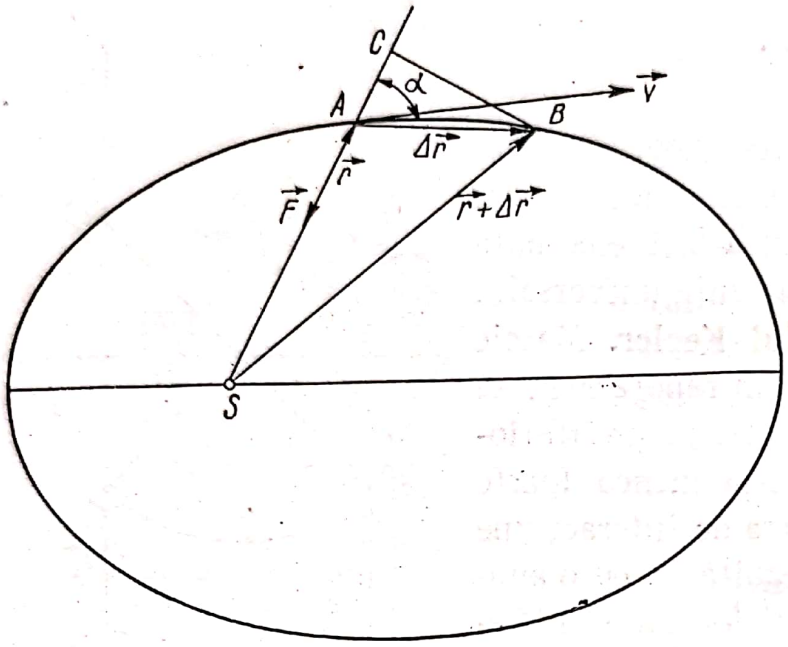


Fig. 6.7. Deducerea legii a II-a a lui Kepler.

(fig. 6.7), deci momentul forței în raport cu acest punct este nul, deci: $\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}=0$. Rezultă că $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{mv}=\overrightarrow{\text{const.}}$ sau

$$L = mvr\sin\alpha = \text{const.} \qquad (6.12)$$

Aria descrisă de raza vectoare $\vec{r}$ în intervalul de timp Δt, pe care îl alegem suficient de mic pentru ca variația vitezei să fie neglijabilă, este:

$$\Delta S = (1/2)\cdot rBC = \frac{1}{2} rAB\sin\alpha, \qquad (6.13)$$

unde BC este înălțimea triunghiului ASB (fig. 6.7).

Dar AB este drumul străbătut de planetă în intervalul de timp Δt, deci

$$AB = v\Delta t, \qquad (6.14)$$

Împărțim și înmulțim membrul al doilea al relației (6.13) cu m, ținem seamă de (6.12) și (6.14) și obținem:

$$\Delta S = \frac{\Delta L}{2m}\cdot\Delta t. \qquad (6.15)$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, *ariile măturate de către raza vectoare Soare-planetă sînt direct proporționale cu timpul* (legea a II-a a lui Kepler).

Pentru simplificarea deducerii legii a treia a lui Kepler vom considera traiectoria planetei în jurul Soarelui circulară (această simplificare nu restrînge generalitatea rezultatului). În acest caz după legea a II-a a lui Kepler $\omega = v/r = \text{const}$. Forța centripetă care acționează asupra planetei se datorează atracției Soarelui, de aceea legea a II-a a dinamicii dă:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{4\pi^2 r m}{T^2} = \gamma \frac{m M}{r^2},$$

deci

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{M} = \text{const}. \tag{6.16}$$

Expresia (6.16) reprezintă legea a III-a a lui Kepler.

Legile lui Kepler sînt caracteristice pentru toate sistemele în care acționează forțe centrale de tipul $F \sim 1/r^2$.

6.7. **Calculul masei Pămîntului.** După legea gravitației universale, greutatea unei particule de masă m, aflată în vecinătatea Pămîntului, este:

$$mg = \gamma \frac{mM}{R^2}, \tag{6.17}$$

unde R este raza Pămîntului.

Din (6.17) deducem masa Pămîntului $M = \frac{gR^2}{\gamma} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; am luat valorile $g = 9{,}81$ m/s^2, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2, $R = 6{,}38 \cdot 10^6$ m. Pentru densitatea medie a Pămîntului s-a găsit valoarea 5 520 kg/m^3. Densitatea medie a păturilor superficiale fiind numai de 2 700 kg/m^3, rezultă că Pămîntul este mai dens în centru decît la suprafață.

6.8. **Calculul masei Soarelui.** Forța centripetă care acționează asupra Pămîntului, în mișcarea sa pe orbită circulară în jurul Soarelui, este:

$$\frac{4\pi^2 r M}{T^2} = \gamma \frac{M M_S}{r^2} \tag{6.18}$$

unde T este perioada de revoluție a Pămîntului și r raza orbitei Pămîntului.

Scanned with OKEN Scanner

Din (6.18) obținem $M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma} = 1 \cdot 98 \cdot 10^{30}$ kg, deoarece $r = 149{,}5 \cdot 10^6$ km.

Masa Soarelui este de 330 000 ori mai mare decît masa Pămîntului.

6.9. **Cîmpul gravitațional.** *Cîmpul gravitațional este o anumită proprietate a materiei care leagă corpurile în sisteme și prin intermediul căruia se transmit interacțiunile dintre corpuri, din aproape în aproape, cu viteze finite.*

Fiecare corp creează în jurul său un cîmp gravitațional și de asemenea suferă acțiunea cîmpului gravitațional creat de alte corpuri. Noi trăim în cîmpul gravitațional al Pămîntului.

În fiecare punct al cîmpului gravitațional se exercită o forță, a cărei acțiune asupra unei particule punctiforme, aflată în punctul respectiv, depinde de poziția particulei în cîmp.

6.10. **Intensitatea cîmpului gravitațional.** Se poate determina, în fiecare punct al cîmpului gravitațional, raportul dintre forța $\vec{F}$ care acționează asupra unei particule punctiforme care se află în acest cîmp și masa m a particulei:

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{6.19}$$

În cazul unei particule punctiforme sau al unei sfere omogene de masă M, (6.19) dă

$$\Gamma = \gamma \frac{M}{r^2}, \quad \vec{\Gamma} = -\gamma \frac{M}{r^3} \vec{r}. \tag{6.20}$$

Mărimea vectorială $\vec{\Gamma}$ se numește intensitatea cîmpului gravitațional și este funcție de poziția punctului în cîmp, în care se definește.

Forța de interacțiune gravitațională se mai poate scrie

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma}. \tag{6.21}$$

Conform legii fundamentale a dinamicii, particula cu masa m supusă acțiunii cîmpului gravitațional, va căpăta o accelerație egală cu $\vec{\Gamma}$, independentă de masa sa, de natura substanței, de dimensiunile sau de forma sa

$$m\vec{\Gamma} = m\vec{g},$$

Scanned with OKEN Scanner

sau în cazul unei particule punctiforme sau al unei sfere omogene de masă M

$$g = \Gamma = \gamma \frac{M}{r^2}, \tag{6.22}$$

unde g este accelerația gravitațională. Deci, cîmpul gravitațional se manifestă printr-un cîmp de accelerații. Aceasta este o proprietate remarcabilă a cîmpului gravitațional, care nu se întîlnește nici la cîmpul electric, nici la cîmpul magnetic.

6.11. **Energia potențială.** Să considerăm o particulă de masă m într-un punct A din vecinătatea Pămîntului și să presupunem că asupra particulei acționează o forță $\vec{F}$, care o deplasează uniform pe verticală din punctul A în punctul B. Forța $\vec{F}$ va fi în fiecare moment egală și de sens opus cu forța de atracție gravitațională a Pămîntului.

Lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ sau lucrul mecanic cu semn schimbat efectuat de greutatea $\vec{mg} = -\vec{F}$ măsoară variația energiei potențiale a particulei

$$\Delta U = U_{r'} - U_r = -W. \tag{6.23}$$

Am notat cu W lucrul mecanic al forței gravitaționale, cu U energia potențială, cu r distanța de la centrul pămîntului la punctul A, iar cu r' distanța de la centrul Pămîntului la punctul B.

Forța $\vec{F}$ de-a lungul intervalului AB nu este constantă. Pentru a calcula lucrul mecanic efectuat de aceasta, este necesar să împărțim intervalul AB în n intervale egale între ele, Δr, suficient de mici pentru ca de-a lungul lor forța să nu varieze apreciabil (fig. 6.8).

Vom calcula mai întîi lucrurile mecanice parțiale, efectuate de forța gravitațională pe distanțele Δr_i, care prin însumare dau lucrul mecanic total. Lucrul mecanic efectuat de forța gravitațională pe distanța $\Delta r_1 = r_1 - r$, este

$$\Delta W_1 = -|F_{m1}|\,\Delta r_1 = -\Delta U_1$$

F_{m1} este forța medie pe intervalul $\Delta r_1 = r_1 - r$, anume

$$F_{m1} = -\frac{\gamma mM}{r_{m1}^2} = -\frac{\gamma mM}{r\,r_1}$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece r și r_1 diferă foarte puțin am aproximat distanța medie r_{m1} prin $r_{m1}^2 \cong r_1$.
Deci

$$\Delta W_1 = -\frac{\gamma mM}{r r_1}(r_1 - r)$$

sau

$$\Delta W_1 = -\gamma mM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) = -\Delta U_1.$$

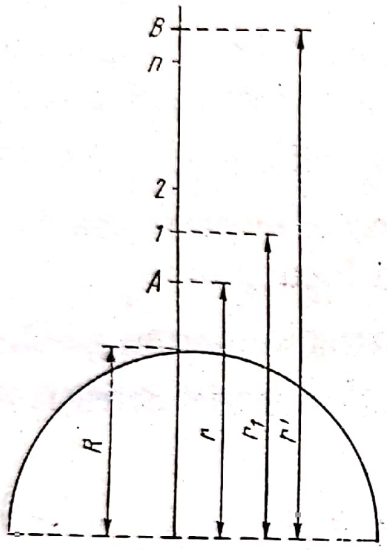


Fig. 6.8. Calculul lucrului mecanic pentru deplasarea unei particule în cîmpul gravitațional din punctul A în B.

În mod asemănător se calculează și celelalte lucruri mecanice parțiale:

$$\Delta W_2 = -\gamma mM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta W_n = -\gamma mM\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'}\right).$$

Lucrul mecanic total va fi

$$W = \sum_1^n \Delta W_i = -\gamma mM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = -\Delta U. \qquad (6.24)$$

Din (6.23) și (6.24) obținem

$$\Delta U = U_{r'} - U_r = \gamma mM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right). \qquad (6.25)$$

Cînd deplasarea particulei se face din punctul A la infinit, obținem

$$U_\infty - U_r = \frac{\gamma mM}{r}. \qquad (6.26)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă considerăm energia potențială egală cu zero la infinit, atunci energia potențială a particulei, într-un punct aflat la distanța r față de centrul Pământului, va fi

$$U_r = -\gamma \frac{mM}{r}. \tag{6.27}$$

În cadrul lecțiilor de fizică din anii precedenți am învățat că un corp care s-a deplasat la înălțimea h față de suprafața Pământului are energia potențială mgh. Aceasta reprezintă variația energiei potențiale a unei particule care s-a deplasat față de suprafața Pământului la înălțimea $h = r' - R$, R fiind raza Pământului. Această variație a energiei potențiale o putem exprima prin mgh, dacă în formula

$$\Delta U = U_{r'} - U_R = \frac{\gamma mM}{r'R}(r' - R) = \frac{\gamma mM}{h'R}h$$

facem următoarele aproximații $R \cdot r' \simeq R^2$, (deoarece $r' \simeq R$) și $g = \gamma M/R^2$. După transformări obținem $\Delta U = mgh$.

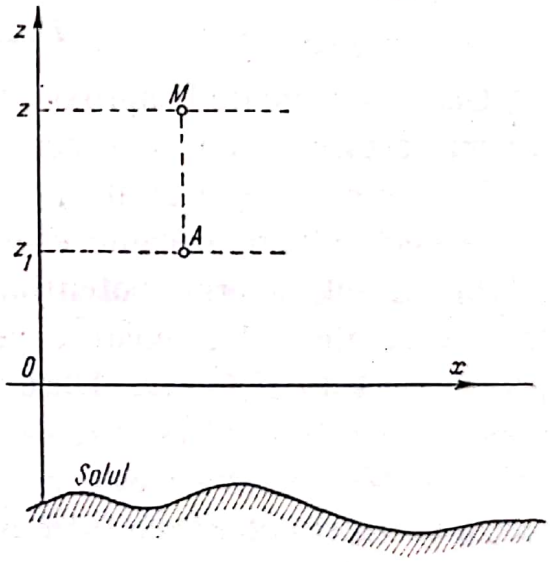


Fig. 6.9. Calculul variației energiei potențiale a unei particule care se deplasează în cîmpul gravitațional.

Este necesar să facem unele precizări asupra formulei cu ajutorul căreia calculăm variația energiei potențiale.

Se consideră o regiune restrînsă din vecinătatea Pământului, în așa fel, încît greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$, a unei particule care se deplasează în această regiune, practic să nu varieze.

Scanned with OKEN Scanner

Poziția particulei în cîmpul gravitațional al Pămîntului nu o vom mai determina față de centrul acestuia, ci față de un plan orizontal, ales în mod arbitrar deasupra solului.

Variația energiei potențiale a particulei care cade din punctul M, cu cota z, în punctul A, cu cota z_1 (fig. 6.9) este egală prin definiție cu minus lucrul mecanic efectuat de greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$ în timpul acestei căderi

$$-\Delta U = U - U_1 = mg(z - z_1) = mgz - mgz_1.$$

Această expresie se poate pune sub forma

$$U - mgz = U_1 - mgz_1. \tag{6.28}$$

Membrul al doilea al egalității (6.28) este o constantă

$$C = U_1 - mgz_1$$

care depinde de valoarea necunoscută a energiei potențiale în punctul A aflat la înălțimea z_1 față de planul de referință.

Energia potențială este funcție de înălțimea z:

$$U = mgz + C. \tag{6.29}$$

Dacă solul poate fi aproximat cu un plan orizontal, atunci i se poate atribui acestui plan cota zero ($z = 0$).

Deoarece masa m aflată pe sol nu mai poate cădea, deci nu se mai poate efectua lucru mecanic, este normal de a atribui particulei de masă m aflată pe sol, energia potențială zero. Deci în cazul acesta constanta C trebuie să fie nulă, deoarece pentru $z = 0$, $U = 0$. Expresia energiei potențiale este $U = mgz$. Dacă solul nu este plan de referință, energia potențială este dată de relația (6.29). Faptul că valoarea constantei C este nedeterminată nu este un inconvenient, pentru că se exprimă variația energiei potențiale între planul de referință (de cota z_1) și punctul în care se află particula (de cotă z)

$$\Delta U = U - U_1 = (mgz + C) - (mgz_1 + C) =$$
$$= mg(z - z_1) = mgh, \qquad (h = z - z_1).$$

6.12. **Potențialul cîmpului gravitațional** *este o mărime ce caracterizează cîmpul gravitațional și se definește prin energia potențială a unei particule aflate în cîmp, raportată la masa acesteia sau reprezintă lucrul*

Scanned with OKEN Scanner

mecanic efectuat de forțele cîmpului, pentru deplasarea unității de masă, în cîmpul gravitațional, din punctul considerat pînă la infinit.

În cazul cînd masa care creează cîmpul este punctiformă, potențialul gravitațional într-un punct al cîmpului este

$$V = \frac{U}{m} = -\gamma \frac{M}{r}. \tag{6.30}$$

Ținînd seama de (6.30), expresia (6.24) se mai poate scrie și sub forma

$$W = m(V_r - V_{r'}), \tag{6.31}$$

unde V_r și V_r' sînt potențialele în A respectiv B, iar $V_r - V_{r'}$ se numește diferența (căderea) de potențial dintre punctele A și B. Dimensiunile potențialului sînt

$$[V] = \frac{[U]}{[m]} = L^2 T^{-2} = J/kg = m^2/s^2.$$

6.13. **Energia de interacțiune a unui sistem de particule.** Să considerăm un sistem format din particulele cu masele m_1 și m_2. Notăm cu V_2 potențialul masei m_1 în punctul ocupat de masa m_2; avem deci $V_2 = -\gamma \frac{m_1}{r}$. Energia de interacțiune a particulelor este egală cu

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} = m_2 V_2. \tag{6.32}$$

Cel mai comod este să scriem această expresie sub formă simetrică:

$$U = \frac{1}{2} m_1 \left(-\gamma \frac{m_2}{r}\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(-\gamma \frac{m_1}{r}\right) = \frac{1}{2} m_1 V_1 + \frac{1}{2} m_2 V_2. \tag{6.33}$$

Energia de interacțiune a unui sistem de particule luate cu semn schimbat reprezintă energia de legătură a sistemului, adică energia necesară pentru a desface sistemul în particulele componente, îndepărtate la infinit, sau energia degajată la formarea sistemului din particulele aduse de la infinit.

6.14. **Liniile de cîmp.** În fiecare punct al cîmpului gravitațional se definește o forță de interacțiune gravitațională. Curba care este tangentă la forță în fiecare punct se numește *linie de cîmp*.

Suprafața din cîmp în ale cărei puncte potențialul are aceeași valoare se numește *suprafață echipotențială*. Dacă o particulă punctiformă se deplasează pe o suprafață echipotențială, forța de interacțiune gravita-

Scanned with OKEN Scanner

ţională nu efectuează lucru mecanic. Aceasta înseamnă că liniile de cîmp, deci forţele gravitaţionale, sînt normale la suprafeţele echipotenţiale. Dacă forţele cîmpului nu ar fi normale pe suprafaţa echipotenţială componenta tangenţială ar efectua lucru mecanic venind în contradicţie, cu concluziile precedente. Dacă considerăm Pămîntul o suprafaţă perfect sferică, atunci suprafeţele echipotenţiale sînt sfere concentrice cu aceasta

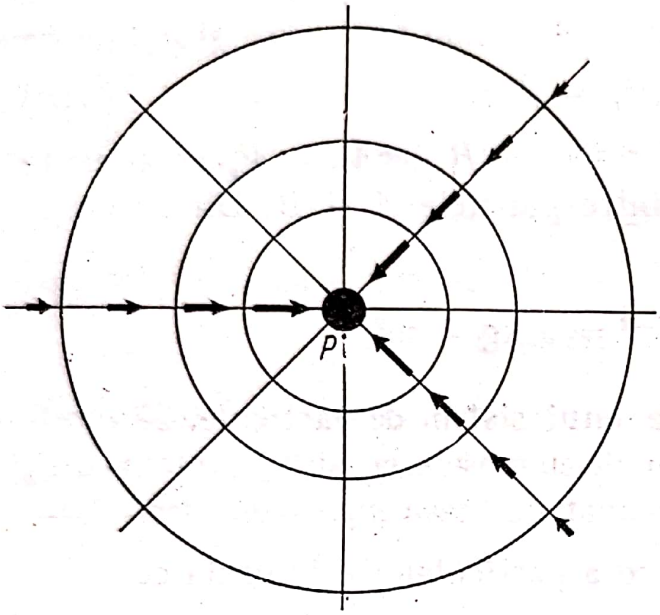


Fig. 6.10. Cîmpul gravitaţional creat în jurul unui corp sferic.

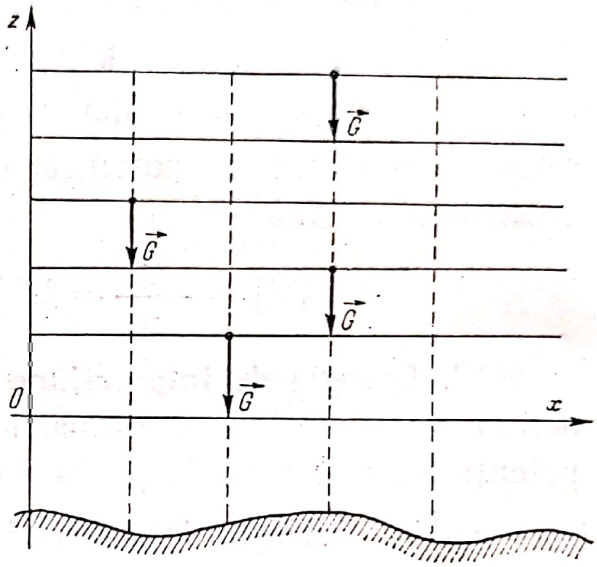


Fig. 6.11. Cîmpul gravitaţional creat într-o regiune restrînsă din vecinătatea Pămîntului.

(fig. 6.10), iar liniile de cîmp sînt drepte radiale, care pornesc din centrul Pămîntului şi sînt normale la suprafeţele echipotenţiale.

Dacă considerăm o regiune nu prea întinsă din cîmpul gravitaţional al Pămîntului, suprafeţele echipotenţiale sînt plane orizontale. Liniile de cîmp sînt drepte paralele, perpendiculare pe planele echipotenţiale. Un astfel de cîmp se spune că este uniform. În acest cîmp, forţa de interacţiune gravitaţională care acţionează asupra unei particule rămîne constantă în timpul deplasării particulei.

6.15. **Variaţia acceleraţiei gravitaţionale.** Considerînd Pămîntul de forma unei sfere formate din pături omogene, putem să aplicăm formulele deduse în cazul punctului material. Să considerăm un corp de masă m, aflat pe suprafaţa Pămîntului la nivelul mării, atunci:

$$g_0 = \gamma \frac{M}{R^2}, \tag{6.34}$$

Scanned with OKEN Scanner

R fiind raza Pămîntului. În cazul cînd corpul se află la înălțimea h deasupra Pămîntului, accelerația gravitațională în acest punct se exprimă astfel:

$$g = \frac{\gamma M}{(R+h)^2}. \tag{6.35}$$

Din relațiile (6.34) și (6.35) obținem $g = g_0 \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$. Pentru înălțimi mici ($h \ll R$), obținem

$$g = g_0 \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = g_0 \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} \cong g_0 \left(1-\frac{2h}{R}\right).$$

Deci g variază cu înălțimea față de suprafața Pămîntului. Accelerația gravitațională variază și în funcție de latitudine din cauza turtirii Pămîntului la poli și din cauza rotației diurne. Dăm cîteva valori ale lui g la diferite latitudini la nivelul mării: la ecuator $g_e = 9{,}780$ m/s², la pol $g_p = 9{,}832$ m/s², la paralela de 45° $g_0 = 9{,}806$ m/s².

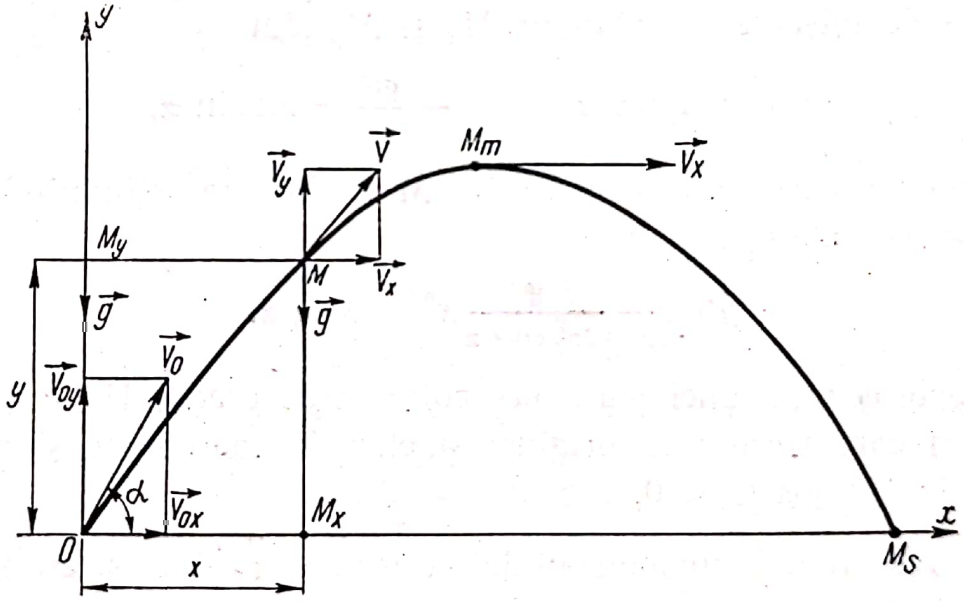


Fig. 6.12. Aruncarea unui corp în cîmpul gravitațional, sub unghiul α față de orizontală.

6.16. **Aruncarea corpurilor sub un unghi față de orizontală.** Să considerăm o regiune restrînsă a spațiului din apropierea suprafeței Pămîntului, în care greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$ a unei particule să nu varieze în timpul mișcării sale, în această porțiune a spațiului.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm că particula a fost lansată dintr-un punct O cu viteza inițială $\vec{v}_0$ a cărei direcție face unghiul α cu orizontala (fig. 6.12).

Raportăm mișcarea particulei la un sistem de coordonate cartezian ortogonal, Ox, Oy. Originea O coincide cu poziția inițială a mobilului, Oy are direcția verticalei, Ox se alege astfel încît planul xOy să conțină vectorul viteză $\vec{v}_0$.

Vom studia mișcarea curbilinie a particulei M, pornind de la mișcările rectilinii ale proiecțiilor M_x și M_y pe cele două axe de coordonate.

Vitezele inițiale ale punctelor M_x și M_y sînt tocmai proiecțiile pe cele două axe ale vitezei inițiale v_0: $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.

După legea fundamentală a dinamicii, particula M are accelerația $\vec{g} = \frac{\vec{G}}{m}$ constantă și cu direcția pe verticală. Proiecțiile acesteia pe axele de coordonate sînt: $a_x = 0$, $a_y = -g$.

Mișcarea punctului M_x este rectilinie și uniformă ($a_x = 0$), iar mișcarea punctului M_y este uniform încetinită ($a_y = -g$).

Legile de mișcare a mobilelor M_x și M_y sînt:

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha. \tag{6.36}$$

Traiectoria curbilinie a mobilului M o obținem eliminînd timpul din ecuațiile (6.36):

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha. \tag{6.37}$$

Aceasta este ecuația unei parabole (polinom de gradul II: $y = ax^2 + bx + c$) care trece prin originea axelor de coordonate și care are concavitatea în jos ($a < 0$, $b > 0$, $c = 0$).

Viteza mobilului la un moment dat t este: $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ și are modulul dat de relația

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + g^2 t^2 + v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gtv_0 \sin \alpha,$$

$$v^2 = v_0^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2g\left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha\right),$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gy; \quad v^2 - v_0^2 = -2gy. \tag{6.38}$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, variația pătratului vitezei depinde numai de diferența de nivel, y, între poziția actuală și poziția inițială. Rezultă că valoarea vitezei este aceeași pentru două poziții ale mobilului (la urcare și la coborîre) care corespund aceleiași înălțimi; în particular, viteza în punctul M_s ($y = 0$)

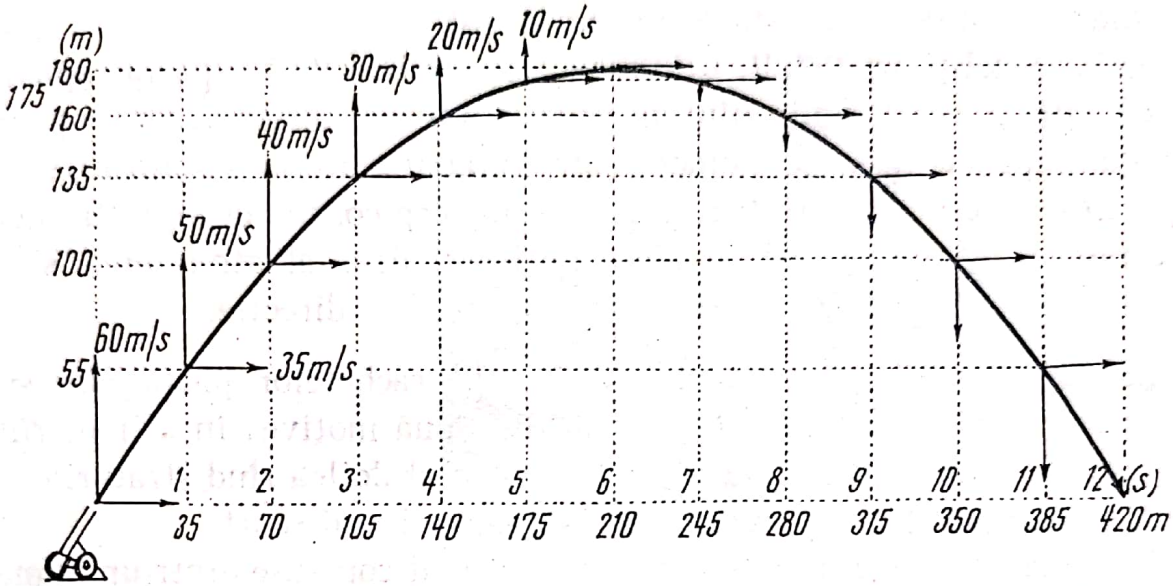


Fig. 6.13. Variația vitezei mobilului de-a lungul traiectoriei parabolice.

are valoarea absolută egală cu aceea a vitezei inițiale (fig. 6.13).

Timpul t_1 după care mobilul atinge înălțimea maximă se obține pentru $v_y = 0$:

$$0 = -gt_1 + v_0 \sin \alpha;\ t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \tag{6.39}$$

Cota maximă H se obține ținînd seamă că la această înălțime $v_y = 0$ și $v = v_x = v_0 \cos \alpha$. În aceste condiții, relația (6.38) se scrie astfel: $v_0^2 \cos^2 \alpha - v_0^2 = -2gy_m = -2gH$, deci

$$H = \frac{v_0 \sin^2 \alpha}{2g}. \tag{6.40}$$

Bătaia sau spațiul maxim parcurs de mobil pe orizontală (OM_s) se obține pentru $y = 0$. Pentru această condiție relația (6.36) se scrie:

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} X^2 + X \operatorname{tg} \alpha,$$

deci

$$X = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{6.41}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceeași viteză inițială, bătaia maximă se obține cînd $\sin^2\alpha = 1$, adică $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ sau $\alpha = \frac{\pi}{4}$, atunci $X_m = \frac{v_0^2}{g}$.

Am studiat aruncarea unui mobil sub un anumit unghi față de orizontală în ipoteza că acesta se mișcă în vid.

6.17. **Sateliți artificiali.** Corpurile terestre lansate în spațiu capabile să se miște în jurul Pămîntului un anumit interval de timp, fără a primi energie suplimentară, se numesc sateliți artificiali ai Pămîntului.

Pentru ca un corp terestru să devină un corp cosmic de sine stătător, este necesar să fie ridicat în afara mediului dens al atmosferei și să i se imprime o anumită viteză, după o anumită direcție.

Lansarea sateliților se face cu ajutorul rachetelor purtătoare sau balistice. Acestea se lansează vertical din două motive: în primul rînd se așază mai ușor pe rampa de lansare și în al doilea rînd straturile de aer mai dense trebuie străbătute pe drumul cel mai scurt.

Rachetele folosite la lansarea sateliților sînt compuse dintr-un număr oarecare de trepte (de la 2 pînă la 5); fiecare treaptă reprezintă, izolat, o rachetă completă cu combustibilul și aparatele necesare pentru transportul său și al tuturor treptelor superioare.

Una dintre problemele cele mai dificile în lansarea unui satelif este dirijarea rachetei cu trepte în timpul mersului său pe curba AE (fig. 6.15,*a*).

Racheta pleacă din punctul A de pe Pămînt, iar în E își termină rolul său de a transporta satelitul.

În figura 6.15, *b* este arătată traiectoria rachetei purtătoare a satelitului. Racheta pleacă de pe Pămînt din punctul A și se ridică vertical cîțiva kilometri și ulterior, după ce trece de troposferă și stratosferă, este înclinată progresiv pînă ajunge în E, la o înălțime suficient de mare deasupra Pămîntului, cu viteză $\vec{v}$ a cărei direcție este cît mai aproape de orizontală; $\alpha \cong \frac{\pi}{2}$. Viteza trebuie să fie aproape perpendiculară pe dreapta ce unește punctul E cu centrul Pămîntului. Întrucît racheta purtătoare ajunge în E în aceleași condiții ca și satelitul, ea nu va mai putea să cadă, ci va deveni, de asemenea, un satelit artificial.

Scanned with OKEN Scanner

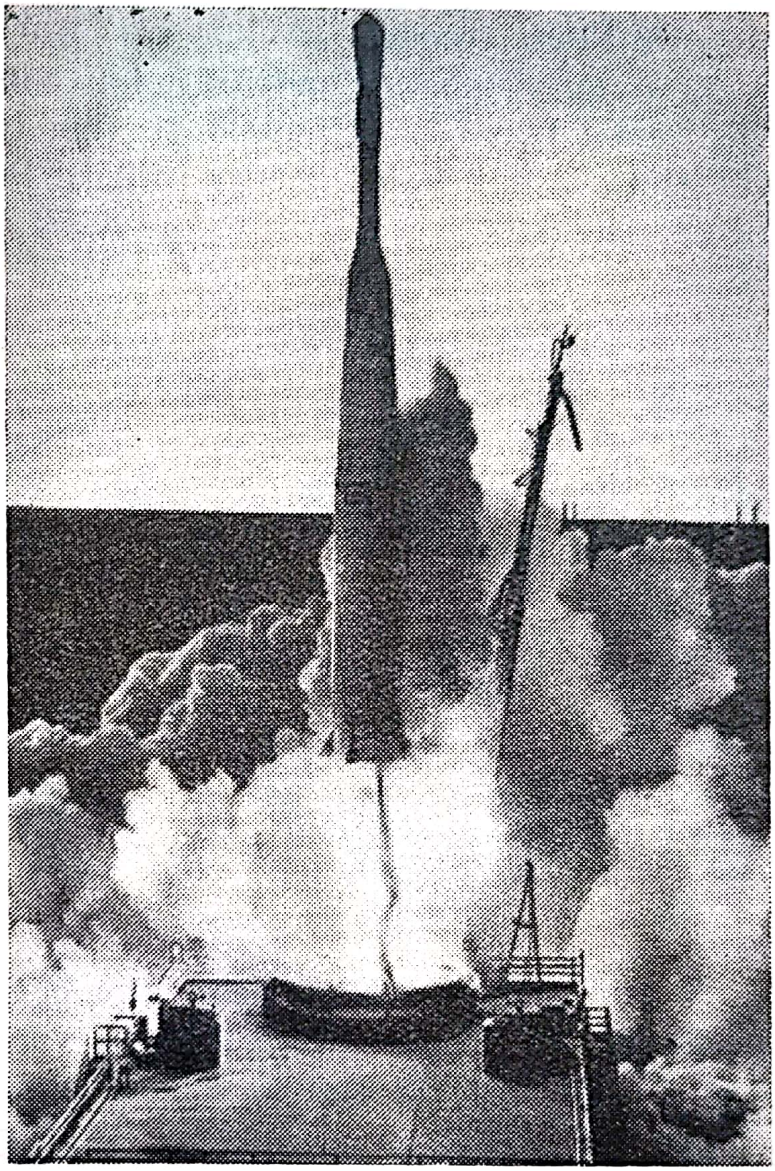


Fig. 6.14, a. Momentul lansării unei rachete.

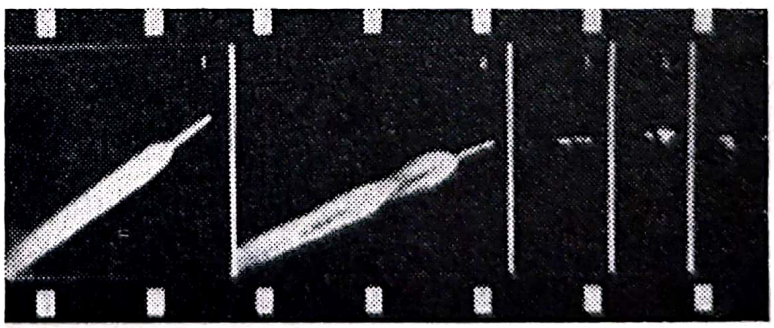


Fig. 6.14, b. Cîteva secvenţe din timpul zborului rachetei.

Scanned with OKEN Scanner

6.18. **Viteze cosmice**

1) *Viteza circulară* numită și prima viteză cosmică sau viteza de satelizare este viteza orizontală pe care trebuie să o aibă un corp (rachetă) pentru a putea gravita în jurul Pământului, pe o traiectorie riguros circulară.

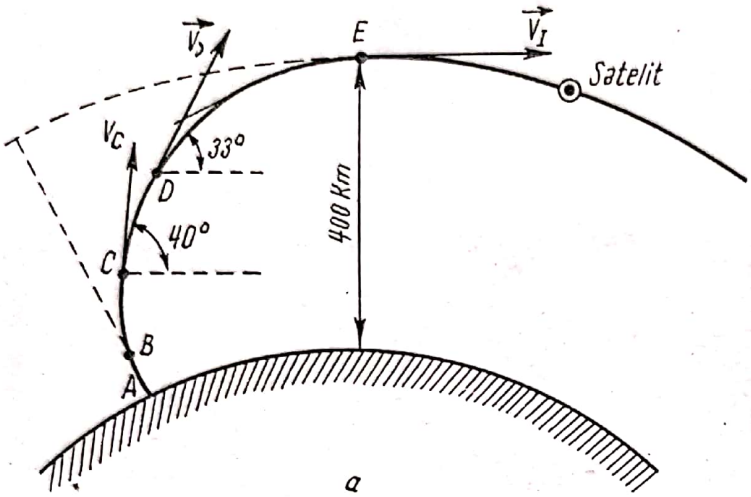


Fig. 6.15, a. Etapele parcurse de un satelit în timpul lansării sale. Traiectoria pe porțiunea AB este verticală, pe porțiunea BE este o elipsă balistică.

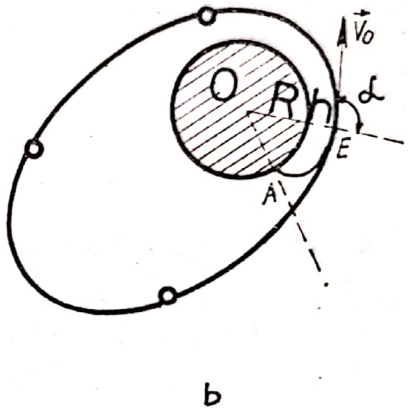


Fig. 6.15, b. Lansarea unui satelit în jurul Pământului.

Să presupunem că din punctul A de pe suprafața Pământului a fost lansat un satelit în condițiile particulare următoare: racheta purtătoare s-a ridicat la înălțime h în afara atmosferei terestre și că viteza comunicată în E rachetei este orizontală $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. Dacă viteza în punctul E este zero sau foarte mică, satelitul cade pe Pământ în vecinătatea punctului A. Pentru viteze în E din ce în ce mai mari, satelitul cade pe Pământ în puncte din ce în ce mai depărtate de punctul A.

Începînd de la o anumită viteză, satelitul descrie o traiectorie circulară pe care se mișcă uniform; s-a produs satelizarea (fig. 6.16). Viteza corespunzătoare acestui caz se numește *prima viteză cosmică* sau *viteză circulară*. Practic este imposibil să se satelizeze în jurul Pământului un corp care a fost lansat cu un tun; plasarea pe orbită se face cu ajutorul unei rachete, ghidată cu ajutorul unui calculator electronic ce funcționează după un program dinainte stabilit, care ridică satelitul pînă la o anumită înălțime dinainte stabilită și îi imprimă în punctul E

(fig. 6.16) o viteză cu mărimea suficient de mare și cu direcția orizontală $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. Pe orbita circulară, satelitul este supus acțiunii forței centripete de atracție

$$\frac{\gamma m M}{r^2} = \frac{m v_1^2}{r};$$

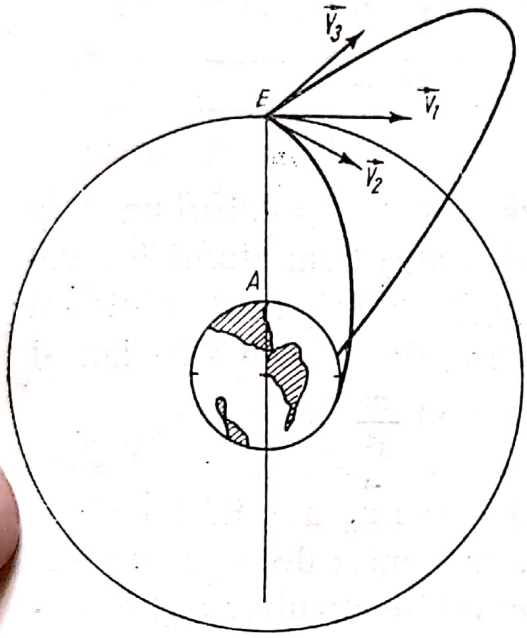


Fig. 6.16. Numai corpurile cu o anumită viteză în modul și orientare în spațiu se mișcă după o traiectorie circulară în jurul Pământului.

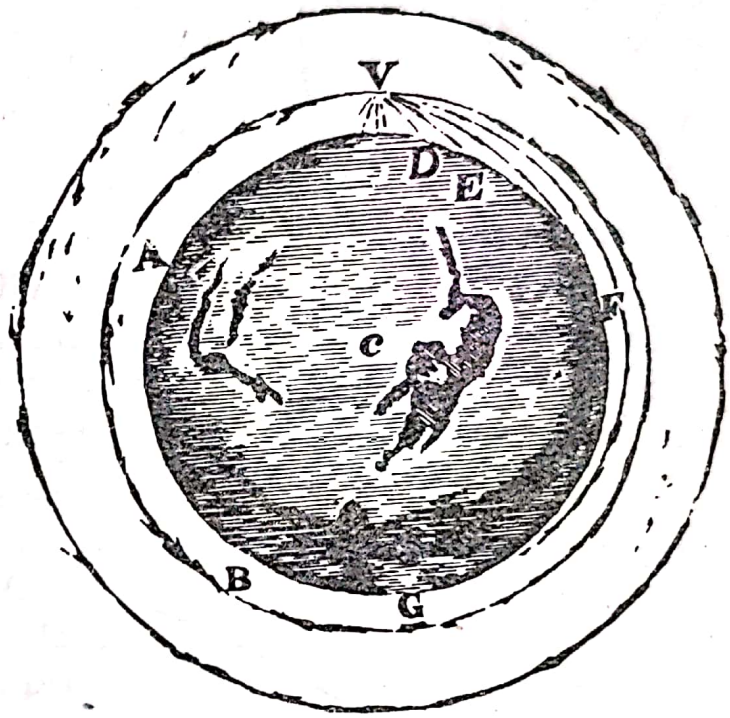


Fig. 6.17. Desenul reprezentat în figură este luat din opera lui Newton „Sistemul lunii". Newton știa că un corp poate să se miște pe o orbită în jurul Pământului dacă are o viteză suficient de mare. Corpul este lansat de pe un munte înalt, cu o viteză orizontală din ce în ce mai mare. Dacă viteza nu este suficient de mare, corpul cade pe Pământ.

deci:

$$v_I = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{gr},$$

unde am notat cu v_I mărimea vitezei circulare.

Energia cinetică a satelitului care se mișcă pe orbita circulară cu viteza $\vec{v}_I$ este

$$E_C = \frac{1}{2} m v_I^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma M m}{r}.$$

Scanned with OKEN Scanner

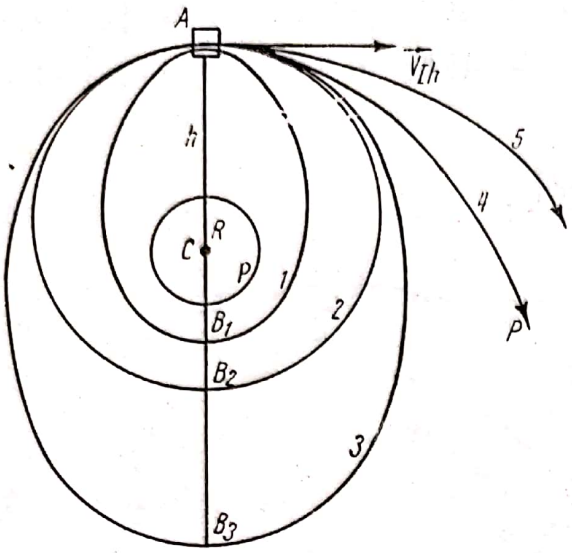


Fig. 6.18. Numai pentru o anumită viteză, un corp lansat de la înălțimea h se mișcă după o traiectorie circulară; pentru alte viteze, traiectoria este eliptică parabolică sau hiperbolică (corpul cade pe Pământ sau pleacă la infinit).

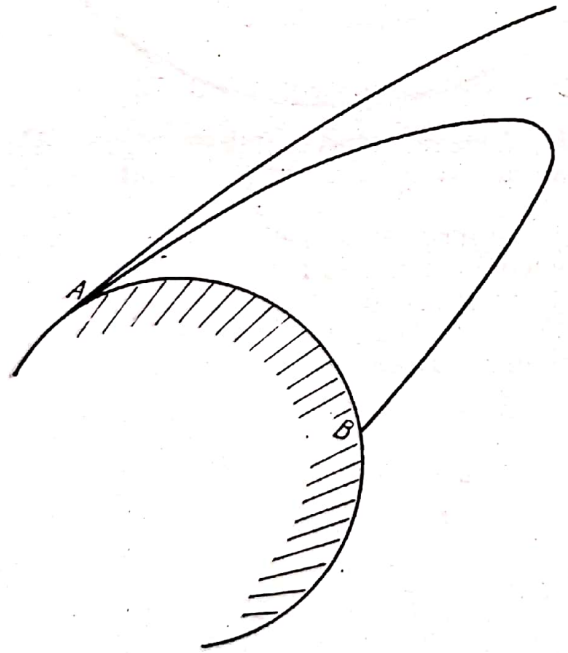


Fig. 6.19. Un corp aruncat de la suprafața Pământului nu va cădea pe Pământ, dacă este lansat cu o viteză mai mare sau egală cu o viteză limită, numită a doua viteză cosmică.

Mărimea vitezei circulare depinde de înălțimea h față de suprafața Pământului, deoarece $g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$; în consecință

$$v_1 = \sqrt{gr} = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}(R+h)} = \sqrt{g_0 R}\sqrt{\frac{R}{R+h}}.$$

Viteza circulară pentru un corp din vecinătatea Pământului are valoarea $v_{10} = 7\,900$ m/s, obținută pentru $h = 0$; $R = 6\,380$ km și $g = g_0 = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$.

Dacă viteza $\vec{v}_h$ a satelitului are valoarea mai mică decît aceea necesară unei orbite circulare v_{1h}, satelitul va fi supus unei forțe de atracție gravitaționale mai mare decît forța centrifugă impusă de viteza mișcării satelitului, și acesta se va apropia de Pământ cu viteza crescîndă, traiectoria fiind în cazul acesta o elipsă (orbita 1 din fig. 6.18), cu unul din focare în centrul Pământului.

Dacă $v_h > v_{1h}$ forța de atracție gravitațională nu poate reține satelitul pe orbita circulară și acesta se va îndepărta de Pământ, mișcîndu-se pe o traiectorie eliptică (traiectoria 3 din fig. 6.18) sau va pleca la infinit.

Scanned with OKEN Scanner

2) *Viteza parabolică*, numită și a *doua viteză cosmică*, *viteza de evadare* sau *viteza de eliberare* (de atracția gravitațională a Pământului).

Dacă se lansează din punctul A de pe suprafața Pământului un corp (aproximat cu un punct material de masă m), cu viteza inițială $\vec{v}_0$ care face unghiul α cu orizontala, acesta va reveni din nou pe Pământ datorită atracției gravitaționale sau, dacă viteza inițială are valoarea suficient de mare, corpul se îndepărtează la infinit față de punctul A (fig. 6.19).

Viteza inițială necesară corpului pentru a evada din vecinătatea Pământului se numește *viteză parabolică* sau *a doua viteză cosmică*.

Dacă se neglijează rezistența aerului și presupunînd Pământul imobil, punctul material va fi supus în timpul mișcării sale numai forței de atracție gravitaționale a Pământului. Expresia vitezei parabolice se obține aplicînd legea conservării energiei.

$$E_C + E_p = E_{C\infty} + E_{p\infty},$$

unde $E_{C\infty}$ și $E_{p\infty}$ sînt respectiv energia cinetică și potențială la infinit.

Avînd în vedere (6.27) și expresia energiei cinetice, obținem:

$$\frac{Mv_{II}^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{mv_\infty^2}{2} + 0,$$

am nota cu v_{II} mărimea vitezei parabolice și cu v_∞ mărimea vitezei punctului material la infinit.

Din egalitatea de mai sus obținem:

$$v_{II}^2 = v_\infty^2 + \frac{2\gamma M}{r}.$$

Considerînd $v_\infty = 0$, rezultă

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}} = \sqrt{2gr},$$

deoarece $\frac{\gamma M}{r} = gr$.

Dacă se aproximează $r = R = 6\,380$ km și $g = g_0 = 9{,}81$ m/s^2 se obține $v_{II} \cong 11{,}2$ km/s $\cong 40\,000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Se constată că viteza parabolică $\vec{v}_{II}$ este independentă de direcţia în care a fost lansat corpul. Orice corp lansat de pe Pămînt cu viteza iniţială de mărime $v_0 \geqslant 11{,}2$ km/s, sub un unghi α faţă de orizontală se deplasează după o parabolă (traiectoria 4, fig. 6.18) sau după o hiperbolă (traiectoria 5, fig. 6.18) şi se îndepărtează la infinit de Pămînt.

Tabelul nr. 2

Viteze circulare şi parabolice la diferite înălţimi

Înălţimea (km)	Viteza circulară (km/s)	Viteza parabolică (km/s)
0	7,9	11,2
200	7,8	11,
400	7,7	10,8
600	7,6	10,7
800	7,5	10,5
1000	7,4	10,4

6.19. **Imponderabilitatea** este starea unui corp asupra căruia nu se exercită nici o forţă de greutate sau a cărui greutate este compensată de o altă forţă antagonistă.

Forţa de atracţie pe care aştrii o exercită asupra rachetelor este invers proporţională cu pătratul distanţei, iar la distanţe mari poate deveni neglijabilă. S-ar putea crede că greutatea în interiorul navelor ar putea scădea progresiv din motivul arătat mai sus. Dar cu totul din altă cauză astronauţii şi obiectele din navă se găsesc în stare de imponderabilitate. Pentru a înţelege cauza să ne reamintim experienţa făcută cu tubul lui Newton. Într-un tub vidat se introduc: o bilă de oţel, o bucată mică de lemn şi un fulg, care sînt lăsate să cadă pe verticală, în interiorul tubului. Toate obiectele din tub cad în vid cu aceeaşi viteză şi ajung la baza tubului în acelaşi timp.

Toate corpurile, fie că sînt grele sau uşoare, cad în vid cu aceeaşi viteză dacă au aceleaşi condiţii iniţiale de cădere, acceleraţia fiind independentă de forţa care se exercită asupra corpurilor. Astfel, indepen-

Scanned with OKEN Scanner

dent de valoarea acceleraţiei gravitaţionale în locul considerat (în vecinătatea Pământului sau la mare altitudine), mai multe corpuri lansate împreună în spaţiu şi care se mişcă liber în cîmpul gravitaţional pe o traiectorie oarecare, impusă de cîmp şi viteza iniţială, au în fiecare moment viteze riguros egale. Nu există nici o mişcare relativă între ele, şi ca urmare nu există nici un argument datorită căruia podeaua unei astronave să exercite o forţă asupra picioarelor sau corpului unui astronaut. Astronautul se află pe podeaua astronavei într-o situaţie comparabilă cu aceea a unei persoane care se află în cabina unui ascensor al cărui cablu s-a rupt şi cabina cade liber.

În particular, în cazul unui satelit artificial care se mişcă circular uniform în jurul Pământului, în SC, legat de satelit, forţa centrifugă echilibrează greutatea satelitului, explicînd astfel starea de imponderabilitate.

6.20. Probleme rezolvate

1. O sferă metalică cu raza R are în interiorul său o cavitate sferică cu raza $r = \frac{R}{2}$, care are centrul la distanţa $\frac{R}{2}$ de centrul sferei (fig. 6.21).

Fig. 6.20. Cosmonauţi în stare de imponderabilitate.

Scanned with OKEN Scanner

Ce forță de atracție gravitațională exercită sfera asupra unei particule punctiforme cu masa m, aflată la distanța d de centrul sferei, pe dreapta care unește centrul acesteia cu centrul cavității? Se cunoaște densitatea ρ a metalului.

Rezolvarea problemei

Dacă sfera ar fi fost compactă, forța de atracție exercitată asupra particulei ar fi fost

$F_0 = \gamma \frac{mM}{d^2} = \frac{4\pi R^3 \rho m}{3d^2}$, unde $M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$ este masa sferei fără cavitate.

Influența cavității asupra particulei este echivalentă cu o forță de respingere care are valoarea $F_1 = \frac{\gamma m m'}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}$, unde $m' = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho = \frac{4\pi}{24}$.

$R^3\rho$ este masa scoasă din cavitate.

Forța de atracție exercitată de către sferă asupra masei m este rezultanta celor două forțe

$$F_x = F_0 - F_1 = \gamma \frac{4\pi R^3 \rho m}{3d^2} - \frac{\gamma 4\pi R^3 \rho m}{24\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} =$$

$$= \gamma \frac{4\pi R^3 \rho m}{3}\left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right]$$

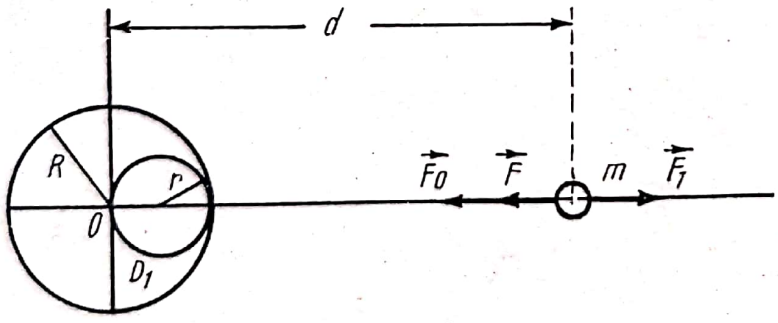


Fig. 6.21.

2. Cu ce viteză minimă trebuie lansată o rachetă de pe Pământ ca să ajungă pe Lună? Cu ce viteză ajunge racheta pe Lună? Distanța dintre

Scanned with OKEN Scanner

centrele celor doi aștri este $d = 380\,000$ km, raza Pământului $R = 6\,370$ km și a Lunii $R_1 = (1/4)\,R$. Masa Lunii este 1/81 din masa Pământului (fig. 6 22).

Rezolvarea problemei

În timpul deplasării rachetei spre Lună, intensitatea cîmpului gravitațional al Pământului scade treptat, în timp ce intensitatea cîmpului

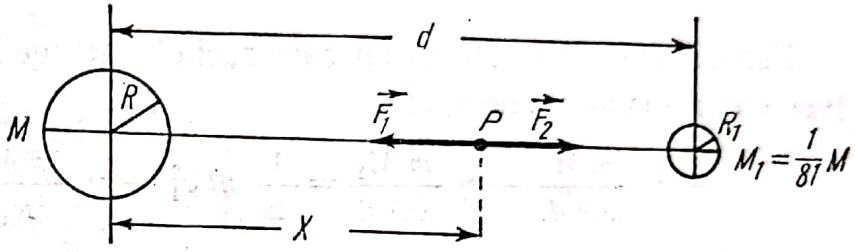


Fig. 6.22.

gravitațional al Lunii crește. Pe dreapta ce unește centrele celor doi aștri există un punct, P, în care intensitățile celor două cîmpuri sînt egale, deci intensitatea cîmpului rezultant este zero:

$$\vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2 = 0\ ;\ |\vec{\Gamma}_1| = |\vec{\Gamma}_2| \Rightarrow \frac{\gamma M}{x^2} = \gamma\ \frac{\frac{M}{81}}{(d-x)^2},$$

de unde $x = 9(d - x)$, deci $x = 0{,}9\,d$. Punctul se găsește la distanța de $0{,}9\,d$ de centrul Pământului.

Viteza inițială a rachetei trebuie să fie astfel calculată, pentru ca în momentul cînd aceasta a ajuns în punctul P, viteza să se anuleze. După ce racheta a ajuns în punctul P, ea va intra în cîmpul gravitațional al Lunii și va cădea accelerat pe Lună. Pentru calculul vitezei inițiale a rachetei aplicăm legea conservării energiei

$$\frac{1}{2}\,mv^2_0 - \gamma\,\frac{m\,M}{R} - \gamma\,\frac{m\,M_1}{d-R} = -\gamma\,\frac{m\,M}{0{,}9\,d} - \gamma\,\frac{m\,M_1}{0{,}1\,d}.$$

În prima parte a egalității de mai sus se află suma energiilor potențială și cinetică a rachetei pe suprafața Pământului, iar în partea a doua a egalității se află energia totală a rachetei în punctul P, la distanța $0{,}9\,d$ față de Pământ. Deoarece viteza rachetei în punctul P este zero,

aceasta posedă în P numai energie potențială. Viteza minimă de lansare a rachetei se deduce din expresia de mai sus

$$v^2_0 = 2\left[\gamma M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{0{,}9\,d} + \frac{1}{81\,(d-R)} - \frac{1}{81.0{,}1\,d}\right)\right] =$$
$$= 2gR\left[1 - \frac{R}{0{,}9\,d} + \frac{R}{81\,(d-R)} - \frac{R}{81\cdot 0{,}1\,d}\right].$$

Avînd în vedere datele problemei, obținem

$$v_0 = \sqrt{2gR\,0{,}98} = 11{,}2\cdot 0{,}99 \text{ km/s} = 11{,}09 \text{ km/s}.$$

Pentru calculul vitezei cu care racheta atinge Luna, aplicăm din nou legea conservării energiei

$$-\gamma\frac{mM}{0{,}9\,d} - \gamma\frac{mM_1}{0{,}1\,d} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \gamma\frac{mM_1}{R_1} - \gamma\frac{mM}{d-R_1},$$

unde M_1 este masa Lunii.

În membrul întîi al egalității de mai sus se află energia totală a rachetei în punctul P și în membrul al doilea, energia rachetei în momentul cînd aceasta cade pe Lună.

Din relația de mai sus, obținem:

$$v_1^2 = 2\left[\gamma\frac{M_1}{R_1}\left(1 - \frac{81\,R_1}{0{,}9\,d} - \frac{R_1}{0{,}1\,d} + \frac{81\,R_1}{d-R_1}\right)\right]$$

sau, avînd în vedere relațiile dintre masele și razele celor două corpuri,

$$v_1^2 = 2\left[\frac{1}{4\cdot 81}\gamma\frac{M}{R}\left(1 - \frac{81\,R}{4\cdot 0{,}9d} - \frac{R}{4\cdot 0{,}1d} + \frac{81\,R}{4\left(d - \frac{1}{4}R\right)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\cdot 81}2gR\left[1 - \frac{81\,R}{4\cdot 0{,}9d} - \frac{R}{4\cdot 0{,}1d} + \frac{81\,R}{4\left(d - \frac{1}{4}R\right)}\right],$$

din care:

$$v_1 = (1/18)\sqrt{2gR\cdot 0{,}91} = (1/18)\cdot 11{,}2\cdot 0{,}95 \text{ km/s} = 0{,}591 \text{ km/s}.$$

3. Pentru a lovi un stîlp cu înălțimea h, al cărui centru se află la distanța X de punctul de plecare a proiectilului, pe aceeași orizontală cu acest punct, un țintaș folosește o praștie cu lungimea l, pe care o rotește într-un plan vertical cu frecvența ν necunoscută (fig. 6.23, *a*).

Scanned with OKEN Scanner

El lansează proiectilul cînd praştia face cu verticala unghiul α. Să se calculeze:

a) frecvenţa υ_1 necesară pentru a atinge stîlpul în centrul său;

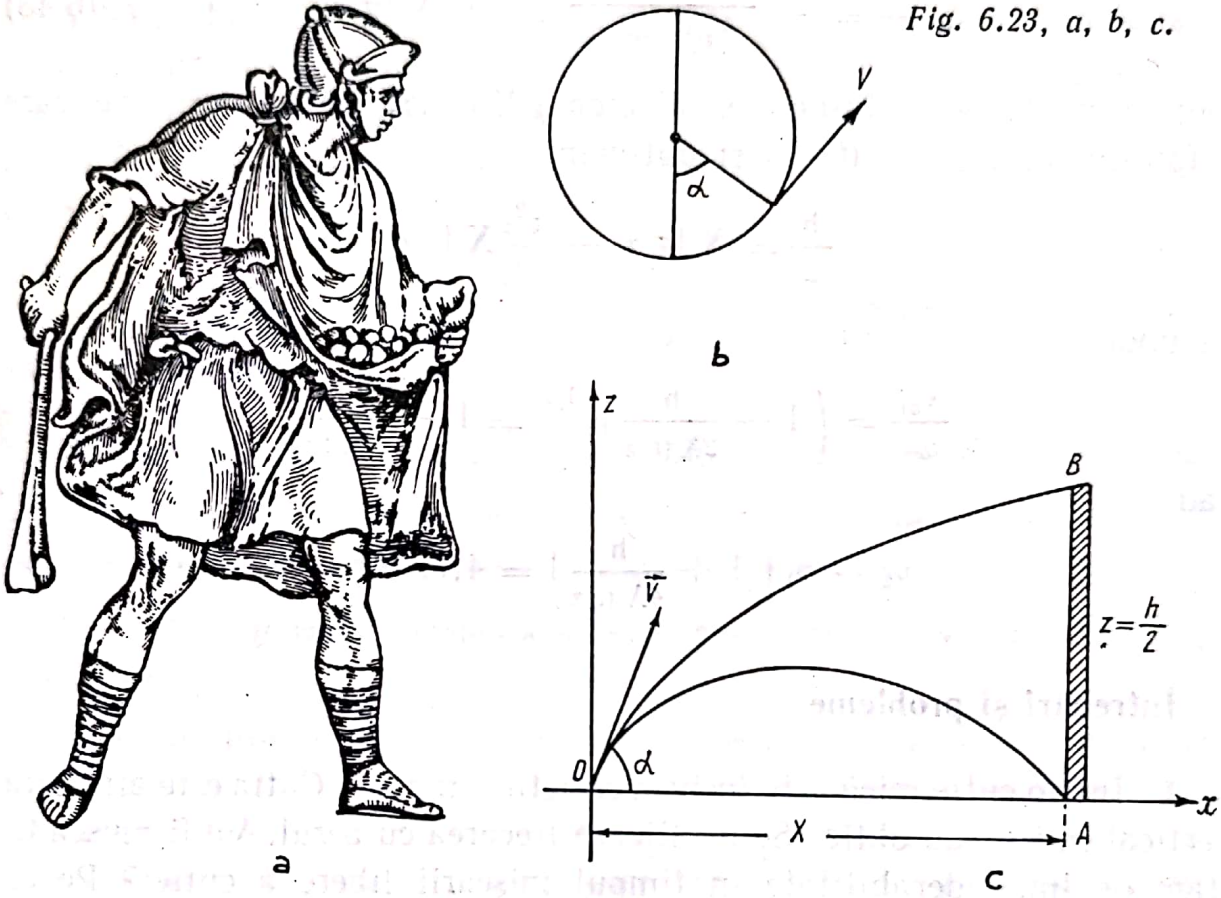


Fig. 6.23, a, b, c.

b) frecvenţa υ_2 necesară pentru a atinge marginea superioară a stîlpului. Se dau: $\alpha = 30°$, $g = 9{,}8$ m/s, $l = 0{,}8$ m, $X = 50$ m, $h = 1$ m.

Rezolvarea problemei

a) Proiectilul lansat cu viteza v_{01} va atinge ţinta în centrul său A după ce a parcurs distanţa

$$X = \frac{2 v_{01}^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \qquad (6.42)$$

de unde $v_{01}^2 = \dfrac{gX}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$, $\upsilon_1 = \dfrac{v_{01}}{2 \pi l} = 4{,}73$ rot/s.

Scanned with OKEN Scanner

b) Proiectilul lansat cu viteza v_{02} va atinge ţinta în B. Ecuaţia traiectoriei proiectilului va fi satisfăcută de coordonatele punctului $B(X, Z = h/2)$:

$$\frac{h}{2} = -\frac{g}{2v_{02}^2 \cos^2 \alpha} X^2 + X \operatorname{tg} \alpha. \qquad (6.43)$$

Din relaţia (6.42) obţinem egalitatea $gX = v_{01}^2\ 2 \sin \alpha \cos \alpha$ pe care o folosim în ecuaţia (6.43) şi obţinem:

$$\frac{h}{2} = X \operatorname{tg} \alpha - \frac{v_{01}^2}{v_{02}^2} X \operatorname{tg} \alpha,$$

de unde

$$\frac{v_{01}}{v_{02}} = \left(1 - \frac{h}{2X \operatorname{tg} \alpha}\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{h}{4X \operatorname{tg} \alpha}$$

sau

$$v_2 = v_1 \left(1 + \frac{h}{4X \operatorname{tg} \alpha}\right) = 4{,}77 \text{ rot/s}.$$

Întrebări şi probleme

1. Într-o cutie mică este închisă ermetic o muscă. Cutia este aruncată vertical în sus sau oblic. Se neglijează frecarea cu aerul. Va fi musca în stare de imponderabilitate în timpul mişcării libere a cutiei? Pe ce porţiune a traiectoriei?

Răspuns: Da, în tot timpul mişcării

2. Care din următoarele instrumente de măsură nu poate fi folosit în condiţiile de imponderabilitate: 1) mensură, 2) cîntar cu pîrghie, 3) dinamometru, 4) areometru, 5) barometru cu mercur, 6) barometrul aneroid, 7) termometrul cu mercur, 8) ceasornic cu pendul, 9) ceasornic cu balansier?

Răspuns: 1) nu, 2) nu, 3) da, 4) nu, 5) nu, 6) da, 7) da, 8) nu, 9) da

3. Ce acceleraţie $\vec{a}$ imprimă forţa de atracţie gravitaţională a Soarelui corpurilor care se află pe Pămînt?

Răspuns: $a = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} = 0{,}6 \text{ cm/s}^2$

Scanned with OKEN Scanner

4. De cîte ori este mai mică energia cinetică a unui satelit artificial al Pămîntului ce se mișcă pe o orbită circulară decît energia sa potențială?

Răspuns: De două ori

5. O rachetă se mișcă liber în spațiul interplanetar. În rachetă se află aparate și instrumente de măsură, printre care și un dinamometru cu resort etalonat pe Pămînt. Ce va indica dinamometrul dacă suspendăm de el un corp cu masa de 1 kg? Prin ce metodă se poate măsura masa corpurilor din rachetă în timpul zborului?

Răspuns: Indicația dinamometrului va fi zero. Se imprimă corpului, suspendat de dinamometru, o accelerație relativă la rachetă. Deformarea dinamometrului va fi proporțională cu masa corpului.

6. Dintr-un turn cu înălțimea h sînt lansate n corpuri cu masele diferite, în n direcții diferite, cu aceeași viteză inițială $\vec{v}_0$. În ce raport se află vitezele cu care corpurile ating solul, presupus un plan orizontal?

Răspuns: Toate corpurile ating pămîntul cu viteza $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

7. O săniuță de masă m coboară liber pe un plan înclinat, intră apoi pe un plan orizontal și se oprește undeva, la o diferență de nivel h față de punctul de plecare. Ce lucru mecanic trebuie efectuat, pentru a aduce săniuța înapoi la locul de unde a pornit? Ce se poate spune despre acest lucru mecanic, dacă dealul nu este plan, ci curbat?

Răspuns: $L = 2mgh$,

8. O planetă se mișcă pe o traiectorie eliptică în jurul Soarelui, situat în unul din focarele elipsei. Avînd în vedere forța de atracție gravitațională a Soarelui, să se spună care sînt punctele de pe traiectorie, în care viteza planetei are valoarea maximă și minimă.

9. O sferă de plumb, cu raza R, are în interiorul său o cavitate cu raza r, al cărui centru se află la distanța d de centrul sferei.

Cu ce forță gravitațională atrage sfera o particulă cu masa m, aflată la distanța l de centrul sferei, dacă linia care unește centrul sferei cu cel al cavității formează un unghi α cu linia care unește centrul sferei cu

Scanned with OKEN Scanner

particula? Se dau: $R = 0{,}5$ m, $r = 5 \cdot 10^{-2}$ m, $d = 0{,}4$ m, $l = 0{,}8$ m, $\alpha = 60°$, $m = 10^{-2}$ kg, densitatea plumbului se consideră cunoscută.

Răspuns: $F = \frac{4}{3}\pi\gamma m\rho \sqrt{\frac{R^6}{l^4} + \frac{r^6}{(l^2-d^2)^2} - \frac{2R^3 r^3 \cos\beta}{l^2(l^2-d^2)}} = 5{,}8 \cdot 10^{-6}$ N

10. Ce greutate are un corp la ecuator și la latitudinea de 60°, dacă Pământul are masa M, raza R și perioada de rotație T?

Răspuns: $m\left(\gamma\frac{M}{R^2} - \frac{4\pi^2 R}{T^2}\right)$; $m\sqrt{\gamma^2\frac{M^2}{R^4} + \frac{4\pi^4 R^2}{T^4} - \gamma\frac{2\pi^2 M}{RT^2}}$

11. La ce înălțime față de suprafața Pământului accelerația gravitațională este 1/4 din mărimea acesteia la suprafața Pământului?

Răspuns: $h = R\left(\sqrt{n} - 1\right)$; $n = 4$

12. Comparați viteza parabolică (de evadare) a unei particule de nisip cu masa de 1 mg cu aceea a unei rachete cu masa de 10^3 kg. Să se neglijeze rezistența aerului.

Răspuns: Vitezele de evadare sînt egale.

13. Un satelit artificial al Pământului, care se mișcă pe o orbită circulară, posedă o energie cinetică E_c. Ce energie suplimentară îi este necesară pentru a se îndepărta de Pământ pentru totdeauna?

Răspuns: Energia suplimentară este egală cu energia cinetică

14. Un satelit artificial al Pământului se mișcă pe o orbită circulară în planul ecuatorului. La ce distanță de centrul Pământului se află satelitul și cu ce viteză se mișcă în raport cu suprafața Pământului, dacă pentru un observator de pe Pământ satelitul pare imobil (satelit staționar)?

Răspuns: $r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2 T^2}{4\pi^2}} = 42500$ km, $v = 2{,}6$ km/s.

15. La ecuatorul unei planete corpurile au o greutate de două ori mai mică decît la polul planetei. Să se determine densitatea medie a substanței planetei, dacă se știe că perioada de rotație a planetei în jurul axei sale este de 2 ore 27,5 minute.

Răspuns: $\rho = \frac{6\pi}{\gamma T^2} \simeq 3{,}6 \frac{g}{cm^3}$

Scanned with OKEN Scanner

16. Doi sateliți se mișcă de-a lungul unei orbite circulare, în același sens, la o distanță mică unul de altul. Un container trebuie să fie aruncat din primul satelit în al doilea. Cum va putea ajunge containerul mai repede în al doilea satelit: dacă este aruncat în sensul de mișcare a sateliților sau în sensul opus? Viteza containerului $\vec{u}$ față de satelit este mai mică decît viteza $\vec{v}$ a satelitului.

Răspuns: În sensul de mișcare a sateliților.

17. Un sportiv își ia elanul timp de t secunde cu accelerația maximă și face o săritură în lungime. Să se afle lungimea săriturii, dacă înălțimea la care se ridică sportivul este de h metri. Coeficientul de frecare dintre tălpile pantofilor și sol este μ și timpul de acțiune al forței de frecare în timpul luării elanului este egal cu t/n. Se neglijează rezistența aerului.

Răspuns: $l = 2\mu \frac{t}{n} \sqrt{2gh}$

18. De pe un teren orizontal se aruncă sub un unghi α o minge. În cădere, mingea lovește un perete vertical și cade din nou pe terenul orizontal într-un anumit punct. Se consideră că punctele de unde s-a aruncat mingea și unde s-a întors se găsesc la distanțele $d_1 = 10$ m, respectiv $d_2 = 5$ m de perete. Să se afle înălțimea la care mingea atinge peretele și care a fost viteza ei inițială.

Răspuns: $h = 0{,}39$ m; $v_0 = 12{,}23$ m/s

19. Un pompier îndreaptă un jet de apă pe acoperișul unei case cu înălțimea h. La ce distanță s de pompier (pe orizontală) și ce mărime are viteza $\vec{v}$ cu care cade jetul de apă pe acoperișul casei, dacă înălțimea maximă de ridicare a jetului este H și el iese din furtunul pompei de incendiu cu o viteză a cărei mărime este v_0? Se dau: $h = 20$ m, $H = 30$ m, $v_0 = 25$ m/s.

Răspuns: $s = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gH}\left(\sqrt{2H} + \sqrt{2(H-h)}\right)}{g} \simeq 22{,}7$ m,

$v_0 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 15{,}3$ m/s.

Scanned with OKEN Scanner

20. O bilă elastică cade de la înălțimea h în punctul cel mai înalt al unui plan înclinat. Ciocnirea este perfect elastică. De cîte ori se va ciocni bila de planul înclinat, dacă lungimea lui este L, iar unghiul de înclinare față de orizontală este α? Se dau: $h = 0{,}5$ m, $L = 32$ m, $\alpha = 30°$.

Răspuns: $h = 5; n = 0{,}5\sqrt{1 + \frac{L}{h \sin \alpha}} - 1$

21. De pe un turn se aruncă în același moment două corpuri. Primul corp se aruncă sub un unghi α față de orizontală, celălalt sub un unghi β. După ce lege vor varia în raport cu timpul distanța dintre corpuri și viteza lor relativă? Se știe că traiectoriile corpurilor se află în același plan și că ele au fost aruncate cu aceeași viteză inițială $\vec{v_0}$.

Răspuns: $\Delta s = 2v_0 t \sin \frac{(\alpha - \beta)}{2}$, $v_r = 2v_0 \sin \frac{(\alpha - \beta)}{2}$

22. O piatră a fost aruncată cu viteza $\vec{v_0}$ sub un anumit unghi față de orizontală. Să se determine la ce înălțime față de orizontală mărimea vitezei pietrei se va micșora de două ori. Se neglijează rezistența aerului.

Răspuns: $h = \frac{3V_0^2}{8g}$

23. Sub ce unghi și cu ce viteză inițială trebuie aruncată o minge de tenis pentru a lovi un perete vertical situat la o distanță d într-un punct aflat la înălțimea h, în așa fel ca viteza mingii în punctul de ciocnire să fie perpendiculară pe perete. Se dau: $d = 20$ m, $h = 10$ cm, $g = 10$ m/s.

Răspuns: $\alpha = 45°/ v_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin \alpha} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

24. Din vîrful unui turn sînt aruncate două corpuri cu aceeași viteză inițială sub unghiurile de lansare α_1 și α_2. Corpurile cad pe sol în același loc. Să se determine înălțimea turnului.

Răspuns: $H = \frac{2V_0^2}{g} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)^2}$.

Isaac Newton (schiță biografică)

I. Newton, matematician, fizician și astronom englez, s-a născut într-o familie de fermieri la 5 ianuarie 1643, în cătunul Woolsthorpe, situat aproape la 10 km de orășelul Grantham. În Grantham el a urmat

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

școala regală, pe care a absolvit-o cu deosebit succes în 1661, an în care a fost admis la Universitatea din Trinity College din Cambridge.

Școala din Grantham, unde Newton a petrecut aproape 5 ani, a avut, probabil, o mare influență asupra formării caracterului său, contribuind la însușirea matematicii și limbii latine, necesare pentru studiile universitare. La Trinity College își dezvoltă aptitudinile pentru știință. Dintr-un student sîrguincios și corect Newton se transformă repede într-un om de știință înzestrat cu o independență și o originalitate nemaicunoscute.

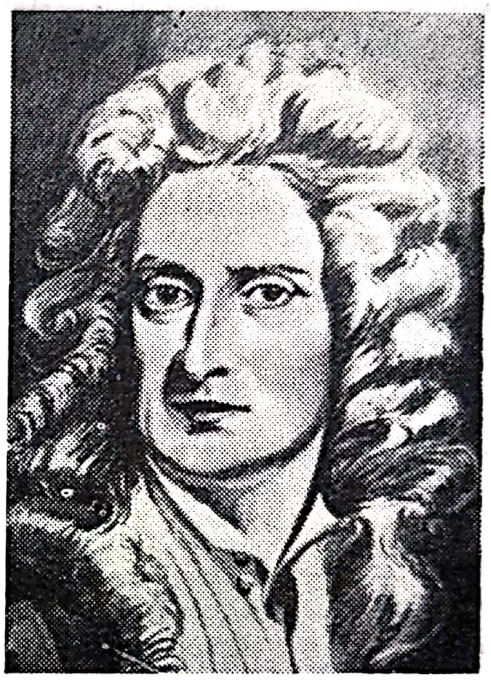


Fig. 6.24. Isaac Newton, matematician, fizician și astronom englez (Woolsthorpe 1643 — Kensington 1727).

În timp ce Newton studia la Cambridge, în 1665, în Anglia, izbucni o cumplită epidemie de ciumă, care a determinat conducerea Universității din Cambridge să întrerupă cursurile universitare. Forțat de aceste împrejurări, Newton se retrage în localitatea sa natală, Woolsthorpe, unde rămîne în „concediu" pînă în 1667, cînd reveni la Cambridge. O mare însemnătate în viața lui Newton și, totodată, și în istoria științei, l-a avut îndelungul „concediu de creație" care i-a fost acordat în timpul groaznicei epidemii de ciumă.

Tînărul savant a petrecut aproape doi ani în atmosfera de liniște de la țară, unde a putut să se concentreze și să mediteze profund asupra acelor germeni de descoperiri, care probabil se iviseră în mintea lui încă din colegiu. În cei doi ani de „concediu" de la Woolsthorpe, Newton a ajuns la rezultate extrem de însemnate în legătură cu cele trei probleme mari care-l frămîntau la vremea aceea și a căror rezolvare avea mai tîrziu să-l acopere de glorie: calculul infinitezimal, teoria despre lumină și gravitația universală.

Pînă la sfîrșitul vieții sale (84 de ani), Newton a creat o operă științifică de o importanță covîrșitoare pentru istoria științei. Descoperirile sale excepționale în mecanică, astronomie, optică, matematică și-au

păstrat integral actualitatea și însemnătatea, constituind un fundament solid pe care s-au dezvoltat aceste științe. Lucrările principale ale lui Newton, „Optica" și „Principiile matematice ale filozofiei naturale", sînt cărți de știință nemuritoare, care și-au căpătat o celebritate binemeritată în lumea științifică.

Newton moare la 20 martie 1727 la Kensington.

Fig. 6.25. Se cunoaște povestea după care Newton a ajuns la descoperirea legii gravitației universale, urmărind, la Woolsthorpe, căderea unui măr dintr-un pom. Această poveste este, pare-se, autentică, și nu o legendă după relatările lui Stukeley, un contemporan al lui Newton.

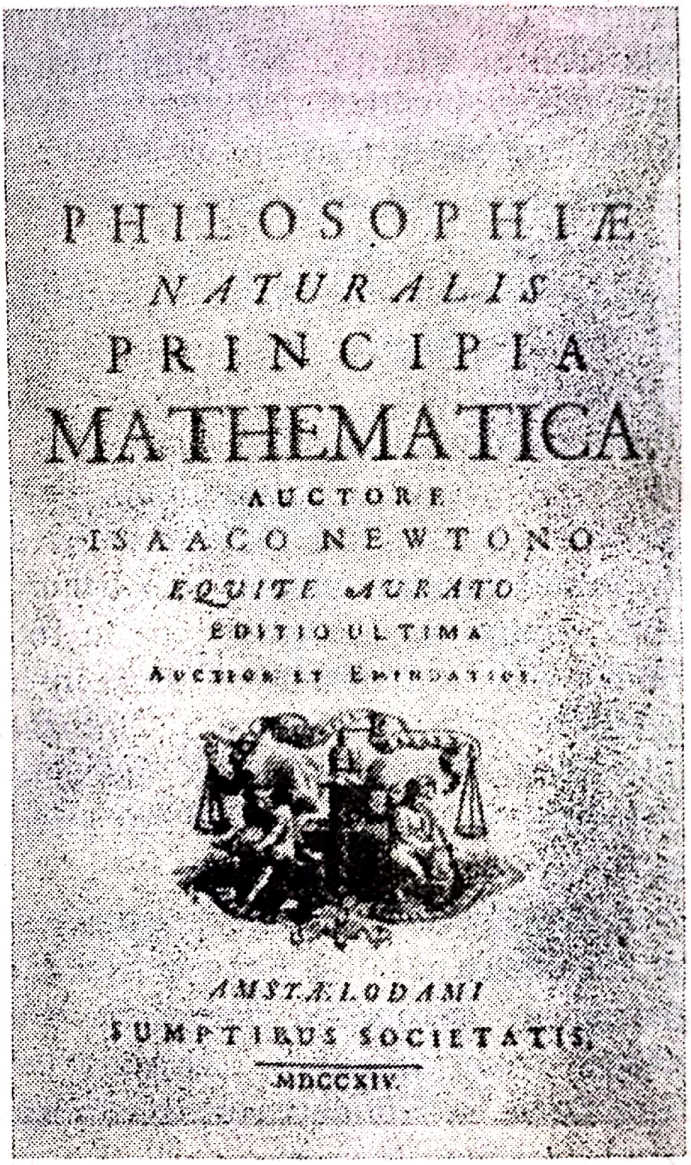

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
AUCTORE
ISAACO NEWTONO
EQUITE AURATO
EDITIO ULTIMA
AUCTIOR ET EMENDATIOR.
AMSTELODAMI
SUMPTIBUS SOCIETATIS.
MDCCXIV.

Fig. 6.26. Pagina de titlu a operei lui Newton „Principiile matematice ale filozofiei naturale", publicată în prima ediție 1687. Fotografia reprezintă coperta unei ediții din 1714.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VII

Mecanica relativistă

Teoria relativității s-a născut la începutul secolului nostru (1905) și este strîns legată de numele lui Albert Einstein (1879—1955). Faptele experimentale care au dus la stabilirea teoriei relativității sînt legate de fenomenele luminoase: propagarea luminii în vid și în substanță.

7.1. **Principiul relativității al lui Galilei.** În secolul trecut, Maxwell a dat teoria electromagnetică a luminii, după care lumina este o undă electromagnetică ce se propagă cu o anumită viteză foarte mare, dar finită: $c = 2{,}997925 \cdot 10^8$ m/s. Purtătorul undei luminoase era considerat eterul, mediul ipotetic universal care umple tot spațiul din Univers, inclusiv spațiile libere dintre atomii substanței. Eterul din spațiul vid, lipsit de substanță, era considerat în repaus absolut. Mișcarea corpurilor față de acest eter era considerată mișcare absolută. Aceasta era concepția lui Newton asupra spațiului și timpului absolut, definite de el astfel:

„*Spațiul absolut* nu este, din cauza naturii sale însești, în nici un fel de raport cu vreun obiect oarecare, fiind mereu același și în nemișcare".

„*Timpul absolut*, adevărat și matematic, se scurge prin natura sa însăși, uniform, fără nici o relație cu vreun obiect oarecare".

Se credea că eterul universal ar putea constitui un sistem de referință (SR) fix, absolut, față de care să se studieze mișcarea corpurilor. De exemplu, s-ar putea presupune că un SR legat de stele ar fi în repaus absolut. Totuși, încă pentru Galilei era clar că prin experiențe mecanice, efectuate în interiorul unui sistem (laborator), este imposibil de determinat mișcarea rectilinie uniformă a acestuia față de stele sau față de Soare sau chiar față de Pămînt. Iată ce scria Galilei în 1632 despre fenomenele mecanice dintr-o cabină închisă a unei corăbii: „Dacă mișcarea corabiei este rectilinie uniformă, nu veți observa nici cea mai mică

Scanned with OKEN Scanner

schimbare în toate fenomenele și nu veți putea hotărî, ținînd seama de vreunul din aceste fenomene, dacă corabia se mișcă sau stă pe loc. Sărind, veți parcurge pe podea aceleași distanțe ca și atunci cînd corabia se află în repaus, adică, datorită mișcării rapide a corăbiei, — nu veți face sărituri mai mari spre pupă, decît spre prora corăbiei, deși în timpul cît vă aflați în aer, podeaua de sub voi fuge în partea opusă săriturii sau, aruncînd un obiect oarecare unui prieten, nu va trebui să-l aruncați cu o forță mai mare, dacă prietenul se va afla lîngă prora corăbiei, iar dumneavoastră lîngă pupă, decît dacă veți ocupa poziții inverse; picăturile dintr-o cană cu apă atîrnată în tavan vor cădea vertical pe podea și nici una din ele nu va cădea în direcția pupei, deși în timpul cît picătura se află în aer, corabia înaintează. Muștele își vor continua zborul, indiferent în ce direcție, și niciodată nu se va întîmpla ca ele să se strîngă spre partea mai apropiată de pupă, ca și cum ar obosi să se tot țină după mersul rapid al corăbiei". Acesta este de fapt conținutul principiului mecanic al relativității.

Tot Galilei a înțeles clar *principiul inerției*, pe care apoi Newton l-a formulat ca primă lege a mecanicii. Cu ajutorul legii inerției poate fi definită clasa sistemelor de referință *inerțiale*, care se mișcă rectiliniu uniform unele față de altele. Experiența arată că sistemele de referință legate de Soare sau de stele sînt inerțiale, pe cînd Pămîntul nu este riguros inerțial, datorită rotației sale diurne.

Principiul relativității al lui Galilei se poate acum formula astfel: nici o experiență mecanică efectuată în *interiorul* unui SR inerțial nu ne permite să determinăm mișcarea sa rectilinie și uniformă față de alte SR inerțiale (față de stele și nebuloase). Altfel spus: *legile mecanicii sînt aceleași în toate SR inerțiale sau sînt invariante la trecerea de la un SR inerțial la altul*. De aici rezultă că din punct de vedere mecanic toate SR inerțiale, deci care se mișcă rectiliniu uniform unele față de altele; sînt *absolut echivalente*, nici un SR inerțial nu poate fi considerat fix sau absolut, toate sînt egal îndreptățite.

După cum am spus, un fizician închis într-un laborator nu poate determina cu ajutorul experiențelor mecanice mișcarea rectilinie uniformă a laboratorului său față de SR inerțiale, dar poate determina o mișcare curbilinie accelerată a laboratorului. Astfel, prin experiențe mecanice efectuate chiar pe Pămînt se poate dovedi mișcarea de rotație

Scanned with OKEN Scanner

diurnă a Pămîntului. Amintim celebra experienţă a lui Foucault cu pendulul din 1851, devierea spre Est a corpurilor în căderea lor liberă în vid, şi legea lui Bär despre eroziunea malului drept la rîurile din emisfera de nord.

7.2. **Transformările lui Galilei.** Trecerea de la un SR inerţial la altul se face cu ajutorul aşa-numitelor *transformări Galilei* — relaţii care leagă

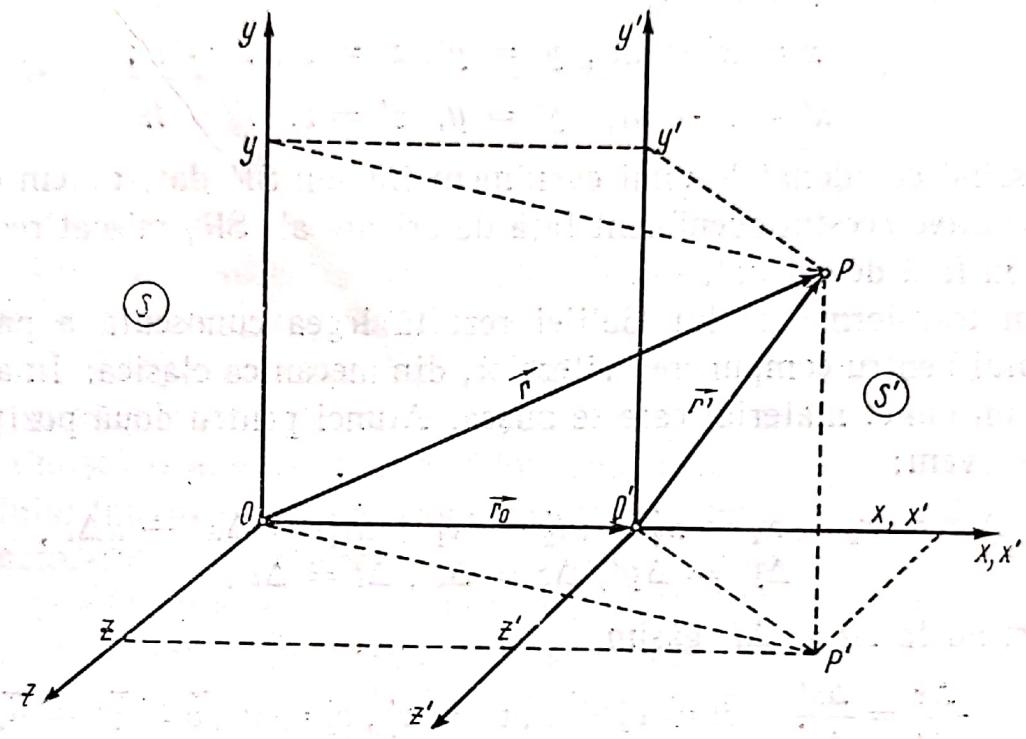


Fig. 7.1. Două sisteme de referinţă S şi S' aflate în translaţie uniformă de-a lungul axei comune Ox (Ox').

coordonatele unui corp, măsurate faţă de cele două SR. Aceste relaţii se bazează pe admiterea că timpul curge la fel faţă de orice SR inerţial, adică duratele dintre evenimente sînt aceleaşi pentru toate SR inerţiale, în particular două evenimente simultane într-un SR sînt simultane în oricare alt SR. Se admite de asemenea că distanţele, lungimile sau dimensiunile corpurilor sînt aceleaşi faţă de toate SR inerţiale.

Un *eveniment* (de exemplu, ciocnirea a două particule, dezintegrarea unui nucleu etc.) este caracterizat prin 4 coordonate: locul prin 3 coordonate spaţiale x, y, z şi momentul prin timpul t (coordonata temporală).

Fie două SR, numite S şi S', care se mişcă rectiliniu uniform unul faţă de celălalt de-a lungul axei comune Ox (fig. 7.1). Fie u = const. viteza lui S' faţă de S.

Scanned with OKEN Scanner

Un eveniment P are coordonatele spațio-temporale x, y, z, t în S și x', y', z', t' în S'. În baza caracterului absolut al lungimilor și duratelor ($t = t'$), putem scrie $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$, unde $\vec{r} = (x, y, z)$ sînt coordonatele evenimentului P față de S, $\vec{r}' = (x', y', z')$ coordonatele aceluiași eveniment față de S' și $r_0 = ut$. Trecînd la proiecții pe axe, rezultă imediat transformările lui Galilei:

$$\begin{aligned} x &= x' + ut', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'; \\ x' &= x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Cunoscînd coordonatele unui eveniment într-un SR dat, putem calcula coordonatele acestui eveniment față de oricare alt SR, mișcat rectiliniu uniform față de cel dat.

Din transformările lui Galilei rezultă legea cunoscută a paralelogramului pentru compunerea vitezelor, din mecanica clasică. În adevăr, fie P un punct material care se mișcă. Atunci pentru două poziții succesive avem:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x_2' + ut_2' - (x_1' + ut_1') = \Delta x' + u\Delta t',$$
$$\Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z', \quad \Delta t = \Delta t'.$$

Împărțind la $\Delta t = \Delta t'$ găsim

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} + u = v_x' + u, \quad v_y = v_y', \quad v_z' = v_z, \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \tag{7.2}$$

$\vec{v}$ — viteza absolută, $\vec{v}'$ — viteza relativă, $\vec{u}$ — viteza de transport.

Calculînd variația vitezei punctului material ($u = \text{const.}$) și împărțind la intervalul de timp corespunzător $\Delta t = \Delta t'$, găsim accelerațiile:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x'}{\Delta t} = a_x', \quad a_y' = a_y, \quad a_z' = a_z, \quad \vec{a} = \vec{a}', \tag{7.3}$$

adică rezultatul cunoscut al invarianței accelerației la trecerea de la un SR la altul mișcat *rectiliniu uniform* față de primul.

Deoarece măsurarea forței poate fi redusă la măsurarea unor lungimi (alungirea unui resort) și durate (a simultaneității), rezultă că în mecanica clasică intensitatea forței are aceeași valoare în toate SR inerțiale. În sfîrșit, masa fiind considerată *constantă*, independentă de SR sau de starea de mișcare a corpului, rezultă că ecuația fundamentală a dinamicii

Scanned with OKEN Scanner

$\vec{F} = \vec{ma}$ este aceeași în toate SR inerțiale, deci *toate legile mecanicii clasice sînt aceleași în toate* SR *inerțiale*, adică *sînt invariante la transformările lui Galilei*, pe scurt *sînt Galilei-invariante sau G-invariante.*

Prin urmare, legile mecanicii clasice ne arată că nu există și nu are sens un spațiu absolut; nu există mișcare absolută și viteză absolută (decît în sensul convențional de la compunerea mișcărilor); există numai mișcare relativă a corpului față de alte corpuri. Accelerația are însă un caracter absolut față de SR inerțiale.

7.3. **Postulatele teoriei relativității.** În 1863 J. C. Maxwell a formulat legile electromagnetismului și a dat teoria electromagnetică a luminii. Ecuațiile lui Maxwell nu sînt însă G-invariante, adică nu sînt invariante la transformările lui Galilei, deci fenomenele electromagnetice, în particular cele optice, ar trebui să se supună la legi diferite în SR inerțiale diferite. Or, aceasta ar permite determinarea mișcării relative a unui SR inerțial față de altul și pînă la urmă evidențierea unui SR absolut, presupus legat de eterul cosmic universal, deci ar permite determinarea mișcării absolute a corpurilor, de exemplu mișcarea absolută a Pămîntului față de eter. Ceea ce n-a permis mecanica, ar permite optica. Dar nenumăratele experiențe optice, făcute în acest sens, de exemplu experiențele lui Michelson și Morley de la sfîrșitul secolului trecut, au arătat că nici prin mijloace optice nu se poate determina mișcarea unui SR inerțial. Astfel, s-a găsit că viteza luminii în vid este independent de mișcarea inerțială a sursei sau a receptorului, adică este aceeași față de diferite SR inerțiale. Or, aceasta contrazice flagrant legea clasică de compunere a vitezelor, deci și transformările lui Galilei.

Contradicția ivită a fost rezolvată clar și precis în 1905 de către Albert Einstein (1879—1955) prin crearea teoriei relativității (TR). Pe baza rezultatelor experimentale, Einstein extinde principiul relativității al lui Galilei la *întreaga fizică*: *Toate legile fizicii, nu numai cele mecanice, sînt aceleași în toate* SR *inerțiale*. Nici o experiență *fizică*, efectuată în *interiorul* unui sistem (laborator) inerțial, nu ne permite să determinăm mișcarea rectilinie uniformă a acestuia față de alte SR inerțiale (față de stele și nebuloase). Toate SR inerțiale sînt absolut echivalente din punct de vedere fizic: nu există spațiu absolut, deci nici eterul ipotetic universal care să poată fi luat drept SR absolut. Principiul relativității al lui Einstein constituie *primul* postulat al TR. Cel de-al *doilea* postulat

Scanned with OKEN Scanner

afirmă că viteza maximă de propagare a interacțiunilor sau a energiei este *finită și aceeași* în toate SR inerțiale (în virtutea echivalenței lor), deci este o *constantă universală* a fizicii. Această viteză absolută coincide cu viteza luminii în vid față de SR inerțiale.

Pe aceste două postulate se bazează teoria restrînsă a relativității, adică ele sînt suficiente pentru a construi această teorie.

Din al doilea postulat rezultă imediat *inexistența corpurilor absolut rigide*, deoarece cu o bară absolut rigidă, prin simpla împingere a ei, s-ar putea transmite instantaneu energie altui corp.

De asemenea, al doilea postulat contrazice în mod flagrant legea clasică de compunere a vitezelor, aplicată la propagarea luminii, deci contrazice transformările lui Galilei.

Deoarece legile electromagnetismului (în particular, ale opticii), descrise de ecuațiile lui Maxwell, sînt aceleași în toate SR inerțiale, înseamnă că aceste ecuații sînt corecte. Dar aceste ecuații nu sînt Galilei-invariante, după cum era de așteptat, deoarece nici transformările lui Galilei nu sînt exacte. H.A. Lorentz a găsit transformările care invariază ecuațiile lui Maxwell. Aceste transformări se pot obține și direct din cele două postulate ale TR. Dar transformările lui Lorentz nu invariază ecuațiile mecanicii clasice a lui Newton (care sînt G-invariante). Rezultă că mecanica clasică nu este exactă și trebuie înlocuită cu mecanica relativistă, invariantă la transformările Lorentz.

7.4. **Transformările lui Lorentz.** Noile transformări trebuie să fie *liniare*, la fel ca și transformările lui Galilei. În adevăr, ecuații de grad mai înalt au mai multe soluții și atunci observațiile dintr-un SR s-ar interpreta neunivoc în alte SR, or, trebuie să existe o corespondență *biunivocă* între coordonatele aceluiași eveniment, înregistrate în diferite SR. De asemenea, noile transformări trebuie să coincidă practic cu transformările lui Galilei pentru fenomenele mecanice obișnuite, unde se aplică cu mare precizie mecanica clasică.

Fie sistemele S, S′ din figura 7.1. Trebuie să avem relația liniară dintre coordonate:

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t,$$

unde coeficienții nu depind de coordonate, ci numai de viteza relativă u.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru punctele $x = ut$, situate în planul $O'y'z'$ în S, trebuie să rezulte $x' = 0$ în S', oricare ar fi y și z, de aceea:

$$0 = \alpha ut + \beta y + \gamma z + \delta t \longrightarrow \beta = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = -\alpha u,$$
$$x' = \alpha\,(x - ut). \tag{7.4}$$

Analog, trebuie să avem

$$x = \alpha(x' + ut'), \tag{7.4'}$$

deoarece pentru punctele $x' = -ut'$ din planul Oyz în S' trebuie să rezulte $x = 0$ în S oricare ar fi y' și z'. Coeficientul α trebuie să fie același în virtutea echivalenței celor două sisteme (postulatul I), altfel trecerea de la unul la altul ar fi diferită și unul din ele s-ar evidenția, contrar postulatului I. Dealtfel, putem considera că S se mișcă cu viteza $-u$ față de S', atunci coordonatele din S vor trebui puse cu accente, iar cele din S' fără accente, deci trecerea inversă se obține din cea directă prin substituția $(x,t,u) \leftrightarrow (x',t',-u)$, anume

$$x' = \alpha\,(x - ut) \Leftrightarrow x = \alpha\,(x' + ut').$$

În cazul transformărilor lui Galilei, $\alpha = 1$.

Să folosim acum postulatul II pentru a afla pe α. Să presupunem că în momentul inițial cînd originile O și O' coincid, se emite un semnal luminos din origine în sensul axei comune Ox. Un punct oarecare în care ajunge semnalul are coordonata $x = ct$ în S și $x' = ct'$ în S', cu *aceeași* viteză c a luminii (în vid). Scriind transformările (7.4—4') pentru coordonatele acestui punct-eveniment:

$$x' = ct' = \alpha\,(ct - ut),\ x = ct = \alpha\,(ct' + ut'),$$

obținem

$$c^2 = \alpha^2(c^2 - u^2),\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},\quad \beta = \frac{u}{c} \tag{7.5}$$

prin urmare

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},\quad x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{7.6}$$

Introducînd prima relație în a doua, sau invers, găsim formulele pentru transformarea timpului:

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},\quad t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{7.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece sistemele S, S′ se află în translaţie relativă uniformă după axa comună Ox, axele $O'y'$, $O'z'$ rămîn paralele cu axele Oy, Oz şi nu avem vreo deplasare în direcţia acestor axe, de aceea coordonatele transversale y şi z nu sînt afectate de mişcarea reciprocă a sistemelor, adică

$$y = y', \; z = z'. \tag{7.8}$$

Ecuaţiile (7.6—8) reprezintă *transformările lui Lorentz*, care dau trecerea de la un SR inerţial la altul care se mişcă faţă de primul cu viteza constantă u de-a lungul axei comune Ox.

Transformările lui Galilei se obţin din transformările Lorentz ca un caz limită cînd $c \longrightarrow \infty$ sau aproximativ, cînd $u \ll c$, neglijînd puterile superioare ale lui $\beta = u/c \ll 1$.

Conform postulatului I, *toate ecuaţiile fizicii trebuie să fie invariante la transformările lui Lorentz*, pe scurt *Lorentz-invariante sau L-invariante.*

Mecanica clasică este invariantă la transformările Galilei şi nu la transformările Lorentz, de aceea nu este exactă pentru mişcări cu viteze mari, comparabile cu viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8$ m/s şi trebuie înlocuită atunci cu mecanica relativistă.

7.5. **Contracţia lungimilor şi dilatarea duratelor.** În TR, un acelaşi corp are dimensiuni diferite în SR diferite. Fie o riglă în repaus în S′, aşezată paralel cu axa $O'x'$, avînd lungimea $l_0 = x_2' - x_1'$ = diferenţa absciselor capetelor riglei, în S′. Lungimea riglei măsurată în sistemul S, faţă de care ea se mişcă cu viteza u, va fi dată tot de diferenţa absciselor capetelor riglei, luate în *acelaşi moment t în S*:

$$\begin{aligned} l = (x_2 - x_1)\big|_t &= (x_2' \sqrt{1 - u^2/c^2} + ut) - (x_1' \sqrt{1 - u^2/c^2} + ut) = \\ &= (x_2' - x_1') \sqrt{1 - u^2/c^2} = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} < l_0, \end{aligned} \tag{7.9}$$

deci lungimea riglei în SR faţă de care ea se mişcă (longitudinal) este *mai mică*, decît în SR faţă de care ea este în repaus. Lungimea riglei este maximă în SR propriu (faţă de care rigla este în repaus). Numai dimensiunile *longitudinale* faţă de direcţia mişcării sînt diferite în SR diferite, cele transversale pe direcţia mişcării sînt aceleaşi (deoarece $y = y'$, $z = z'$), de aceea volumul corpului apare contractat în acelaşi raport: $V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}$, unde V_0 este volumul propriu (de repaus). Un corp sferic

Scanned with OKEN Scanner

în SC propriu apare turtit în direcția mișcării în SR față de care el se mișcă.

Fie acum un proces într-un punct x' în S' care durează $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ în S', de exemplu două indicații succesive ale unui ceasornic aflat în acel punct. Durata aceluiași proces măsurată în S (față de care ceasornicul se mișcă cu viteza u) va fi dată de diferența momentelor corespunzătoare în S considerate pentru *aceeași abscisă* x':

$$\tau = (t_2 - t_1)\Big|_{x'} = \frac{t'_2 + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{t'_1 + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \tag{7.10}$$

$$= \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} > \tau_0,$$

deci durata unui proces care se desfășoară într-un punct aflat în mișcare față de un SR dat este mai mare decît durata aceluiași proces în SR, față de care acel punct este în repaus. Durata indicată de un ceasornic este minimă în SC propriu (față de care ceasornicul este în repaus).

Din transformările Lorentz rezultă *caracterul relativ al simultaneității*: două evenimente simultane în S', (x'_1, t') și (x'_2, t'), de exemplu capetele unei rigle ca mai sus nu mai sînt simultane în S:

$$t_1 = \frac{t' + ux'_1/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \neq t_2 = \frac{t' + ux'_2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (x'_1 \neq x'_2).$$

Viteza limită sau viteza maximă c, egală cu viteza luminii în vid, *nu poate fi depășită*. Altfel, transformările Lorentz ar deveni imaginare (cantitatea de sub radical ar deveni negativă) și ar pierde sens fizic: coordonatele evenimentelor în S' ar deveni imaginare. Pe de altă parte, cînd $u \longrightarrow c$, dimensiunile longitudinale ale corpurilor tind către zero (pentru $u > c$, devin imaginare!), spațiul tridimensional degenerează într-un spațiu bidimensional, devine un plan perpendicular pe direcția mișcării (pentru $u > c$ spațiul devine imaginar). Duratele proceselor tind către infinit (pentru $u > c$, devin imaginare), cu alte cuvinte, orice proces ar înceta (secunda „ar dura" o eternitate), dinamica ar degenera în statică.

Scanned with OKEN Scanner

7.6. **Compunerea vitezelor.** Procedînd analog ca la transformările lui Galilei avem:

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},\quad \Delta y = \Delta y',\quad \Delta z = \Delta z',\quad \Delta t = \frac{\Delta t' + u\Delta x'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

și împărțind primele trei relații la ultima, obținem:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\Delta t' + u\Delta x'/c'} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + u}{1 + u\Delta x'/c^2\,\Delta t'} = \frac{v_x' + u}{1 + v_x' u/c^2},$$

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'\sqrt{1 - u^2/c^2}}{\Delta t' + u\Delta x'/c^2} = \frac{v_y'\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v_x' u/c^2}, \qquad (7.11)$$

$$v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z'\sqrt{1 - u^2/c^2}}{\Delta t' + u\Delta x'/c^2} = \frac{v_z'\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v_x' u/c^2}.$$

Acestea sînt formulele relativiste de compunere a vitezelor în cazul mișcării SR ca în figura 7.1 (v — viteza absolută, v' — viteza relativă, u — viteza de transport). Față de legea clasică de compunere a vitezelor, în legea relativistă apare numitorul $1 + v_x' u/c^2$, iar la componentele transversale apare la numărător radicalul Lorentz. În cazul limită $c \to \infty$ sau pentru $u \ll c$, neglijînd $u^2/c^2 \ll 1$, obținem formulele clasice de compunere a vitezelor.

Formulele relativiste de compunere a vitezelor ne arată, de asemenea, că viteza c nu poate fi depășită. De exemplu, dacă compunem două viteze de aceeași direcție și sens (Ox), egale fiecare cu $3c/4$, obținem

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + v_x' u/c^2} = \frac{3c/4 + 3c/4}{1 + 9/16} = \frac{24}{25}c < c,$$

în timp ce legea clasică dă $v_x = v_x' + u = 3c/4 + 3c/4 = 3c/2 > c$. Dacă una din viteze este egală cu c, rezultatul este tot c, în oricare SR (indiferent de u):

$$v_x = \frac{c + u}{1 + cu/c^2} = c \text{ sau } v_x = \frac{c + c}{1 + c \cdot c/c^2} = c,$$

spre deosebire de rezultatul clasic:

$$v_x = c + u > c \text{ sau } v_x = c + c = 2c.$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce este în contradicție cu experiența (de exemplu, cu experiențele lui Michelson și Morley).

7.7. **Impulsul și masa.** Legea conservării impulsului unui sistem izolat este valabilă în mecanica clasică în orice SR inerțial dacă definim impulsul prin $\vec{p} = \overrightarrow{mv}$ cu $m = \text{const.}$ și aplicăm legea clasică de compunere (transformare) a vitezelor, adică aplicăm transformările Galilei. Dar în mecanica relativistă vitezele se transformă altfel (așa cum rezultă din transformările Lorentz), de aceea dacă păstrăm definiția impulsului (cantității de mișcare) ca *produsul dintre masă și viteză* $\overrightarrow{mv}$ cu $m = \text{const}$, legea conservării impulsului n-ar fi valabilă față de diferite SR, adică n-ar fi Lorentz-invariantă. Or, există o măsură vectorială a mișcării mecanice și legea respectivă de conservare, în virtutea principiului materialist universal al conservării materiei și mișcării. În cazul nerelativist ($v \ll c$) impulsul relativist trebuie să coincidă cu impulsul clasic $\overrightarrow{mv}$.

Dacă păstrăm aceeași expresie $\overrightarrow{mv}$ pentru impulsul relativist, trebuie să admitem atunci că masa relativistă *m nu este constantă*, ci depinde de SR față de care o măsurăm, analog lungimilor și duratelor, adică depinde de starea de mișcare a corpului. Masa corpului măsurată în SR propriu, adică în SC legat rigid de corp, deci mișcat solidar cu acesta, față de care corpul este în repaus, se numește *masa de repaus* m_0. Masa de mișcare m trebuie să depindă de viteza corpului față de SR considerat, și anume de modulul vitezei, altfel s-ar evidenția o direcție privilegiată (contrar postulatului I).

Legea variației masei cu viteza se poate obține considerînd un exemplu de ciocnire a două bile identice și punînd condiția de conservare a impulsului total față de două SR diferite (legate prin transformările Lorentz). Aceste considerații, cît și altele, ne conduc la următoarea formulă:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ deci } \vec{p} = \overrightarrow{mv} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (7.12)$$

Cînd $v \to c$, masa și impulsul tind către infinit, iar pentru $v > c$ ele devin imaginare. Masa și impulsul sînt minime în SC propriu. Pentru $v \ll c$, neglijînd $v^2/c^2 \ll 1$, găsim $m \approx m_0$. Pentru o variație de $1\%_0$ trebuie o viteză enormă de peste 13 000 km/s (de peste 1 000 ori mai mare decît a

Scanned with OKEN Scanner

doua viteză cosmică). De aceea, variația masei cu viteza, cît și celelalte efecte relativiste (contracția lungimilor, dilatarea duratelor etc.) sînt cît de cît importante numai la viteze extrem de mari, apropiate de viteza luminii.

7.8. **Energia.** Impulsul unui punct material izolat se conservă. Variația impulsului este egală cu forța aplicată, astfel încît legea fundamentală a dinamicii este

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta (\overrightarrow{mv})}{\Delta t} \neq m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \overrightarrow{ma}, \qquad (7.13)$$

unde însă masa nu este constantă ca în mecanica clasică, ci depinde de viteză, de aceea $\Delta (\overrightarrow{mv}) \neq m \Delta \vec{v}$ și $\vec{F} \neq \overrightarrow{ma}$.

Cu ajutorul legii fundamentale putem găsi expresia relativistă a energiei cinetice. În adevăr, variația energiei cinetice a unui p.m. trebuie să fie egală cu lucrul mecanic efectuat de forța aplicată acestui p.m. Această condiție ne dă

$$W = \vec{F}\,\Delta \vec{r} = \Delta m \cdot c^2 = \Delta E_c,$$

$$E_c = mc^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2, \qquad (7.14)$$

unde $E_0 = m_0 c^2$ este energia de repaus, iar $E = mc^2$ este energia totală. Cu o precizie pînă la v^2/c^2 inclusiv putem scrie:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\sqrt{1 + v^2/c^2}}{\sqrt{1 - v^4/c^4}} \approx \sqrt{1 + v^2/c^2} = \sqrt{(1 + v^2/2c^2)^2 - v^4/4c^4} \approx$$

$$\approx \sqrt{(1 + v^2/2c^2)^2} = 1 + \frac{v^2}{2c^2},$$

atunci, în primă aproximație pentru $v^2/c^2 \ll 1$, expresia relativistă coincide cu cea clasică:

$$E_c \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m v^2.$$

O serie întreagă de experiențe și de considerații teoretice (de exemplu, emisia și absorbția radiației electromagnetice, reacțiile nucleare, trans-

Scanned with OKEN Scanner

formările reciproce ale particulelor elementare etc.) arată că *proporționalitatea dintre energie și masă este universal valabilă*, pentru orice fel de energii:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (7.15)$$

Cînd $v \to c$, energia $E \to \infty$, iar pentru $v > c$, energia E devine imaginară. Aceasta este încă o dovadă că viteza c nu poate fi depășită.

Prin urmare, *orice variație de energie este însoțită de o variație corespunzătoare (proporțională) a masei, și reciproc*: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$. *Legea conservării energiei este și lege a conservării masei.*

De exemplu, dacă un corp absoarbe o cantitate de căldură $Q = 1$ cal, masa lui crește cu

$$\Delta m = \frac{Q}{c^2} = \frac{4{,}18 \text{ J}}{9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2} = 4{,}65 \cdot 10^{-17} \text{ kg}.$$

O energie de 500 miliarde kWh corespunde unei mase de 20 kg. Se vede că la energii obișnuite corespund mase extrem de mici, din cauza valorii mari a constantei de proporționalitate c^2.

Se poate verifica ușor următoarea relație dintre energie și impuls:

$$E^2/c^2 - p^2 = m_0^2 c^2 = \text{invariant}, \quad E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}, \qquad (7.16)$$

în locul formulei clasice $E = p^2/2m$.

Pentru particule cu masa de repaus nulă, $m_0 = 0$ (fotoni, neutrino), din (7.16) rezultă $E = pc$; pe de altă parte $p = mv$ și $E = mc^2$, de unde rezultă $v = c$, adică *particulele cu masa de repaus nulă se mișcă cu viteza limită* c, egală cu viteza luminii, aceeași față de oricare SR inerțial; ele nu se pot mișca cu vreo altă viteză sau să existe în repaus.

Trebuie observat că în locul definiției masei (7.12), în care masa coincide cu raportul dintre impuls și viteză, se poate numi masă doar constanta m_0, adică masa de repaus, expresiile impulsului și a energiei rămînînd mai departe (7.12), (7.15). Pentru m_0 nu există, evident, o lege de conservare.

Teoria relativității a fost strălucit verificată experimental. Astfel, expresia relativistă a impulsului sau variația masei cu viteza se verifică la particulele elementare accelerate la viteze mari, apropiate de viteza

Scanned with OKEN Scanner

luminii. Masa unui electron accelerat pînă la o energie de 30 MeV crește de 60 ori ($m_e c^2 = 0{,}511$ MeV), iar masa unui proton accelerat pînă la 50 GeV crește de peste 50 ori ($m_p c^2 = 938{,}2$ MeV).

Dilatarea duratelor se verifică în calculul timpurilor de viață ale mezonilor în SC de laborator față de SC propriu.

Expresia relativistă a energiei sau relația dintre energie și masă ($E = mc^2$) se verifică în toate reacțiile nucleare și în toate transformările reciproce ale particulelor elementare.

Teoria restrînsă a relativității, prezentată mai sus, se referă la SR inerțiale. Ea a fost extinsă de A. Einstein în 1916 la SR oarecare (neinerțiale), prin crearea teoriei generale a relativității, care înglobează și teoria relativistă a gravitației.

Probleme

7.1. La momentul $t = 0$ se emite din originea comună a sistemelor S, S' un semnal luminos în toate direcțiile. După un timp t, observatorul din S constată că frontul de undă reprezintă o sferă cu centrul în O de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = c^2 t^2$. Aplicînd transformările Lorentz să se arate că și observatorul din S' constată același lucru, că frontul de undă reprezintă o sferă cu centrul în O' de ecuație $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 = c^2 t'^2$.

7.2. Plecînd de la transformările Lorentz

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \qquad t' = \frac{t - u\,x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

prin rezolvare în raport cu (x, t) să se găsească transformările Lorentz inverse.

7.3. Mezonii $\pi^{\pm}$ generați în laborator au un timp de viață $\tau_0 = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ s. Se constată experimental că mezonii $\pi^{\pm}$ născuți la înălțimi mari, $h = 10$—20 km ajung totuși la suprafața Pămîntului, deși s-ar părea că nu pot parcurge un spațiu mai mare decît $s = \tau_0 c = 7{,}8$ m. Să se explice acest fapt.

7.4. Să se calculeze pentru ce viteză masa unui corp se dublează față de masa sa de repaus.

Răspuns: $v = c\sqrt{3}/2 \approx 2{,}6 \cdot 10^8$ m/s.

Scanned with OKEN Scanner

7.5. Cu cît crește masa de repaus $m_0 = 1$ t a unui satelit care iese din cîmpul gravitațional terestru?

Răspuns: $\Delta m = m_0 g R/c^2 \cong 0{,}7$ mg.

7.6. O particulă în repaus de masă m_2 este lovită de o particulă de masă m_1 și viteză v_1, pe care o absoarbe. Să se afle masa m' și viteza v' a particulei compuse rezultate.

Răspuns: $m' = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 / \sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$, $v' = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2 \sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$.

7.7. O particulă în repaus de masă m fisionează în două particule de masă m_1 și m_2. Să se afle energiile E_1 și E_2 ale celor două particule rezultate.

Răspuns: $E_1 = \dfrac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m} c^2$, $E_2 = \dfrac{m^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m} c^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VIII

Mecanica fluidelor ideale

Mecanica fluidelor se ocupă cu echilibrul și mișcarea fluidelor și cu acțiunea lor asupra pereților ce le înconjoară sau asupra corpurilor cufundate în ele.

Problema fundamentală a mecanicii fluidelor este determinarea repartiției presiunilor și vitezelor în interiorul fluidelor.

8.1. Starea fluidă. Corpurile, din punctul de vedere al stării de agregare, se împart în trei mari categorii: solide, lichide și gaze. Lichidele și gazele poartă denumirea de fluide.

Solidele și fluidele se disting ușor prin caracteristicile lor diferite.

Noțiunea de solid este inseparabilă de cea de formă. Din contră, noțiunea de fluid exclude complet noțiunea de formă. Un fluid este, prin definiție, substanța care ia forma vasului care o conține.

Lichidele sînt practic incompresibile. Forțele de coeziune dintre moleculele lichidului fiind mici, forma lor poate fi modificată de o forță foarte mică. Ele își recapătă forma inițială, în momentul cînd forța încetează să acționeze.

Gazele sînt foarte compresibile; între moleculele lor, practic, nu există forțe de coeziune. Dacă vitezele gazelor sînt mici poate fi neglijată compresibilitatea lor. Gazele sînt perfect elastice și umplu totdeauna volumele vaselor ce le conțin.

Fluidele reale opun rezistență la alunecarea unui strat peste altul sau la înaintarea unui corp și de aceea spunem că sînt vîscoase. Viscozitatea este deci rezultatul frecării dintre straturile paralele de fluid care alunecă unul peste celălalt.

Un fluid incompresibil și lipsit de viscozitate se numește *fluid ideal*. Fluidul ideal este un model fizic, el nu există în realitate, însă el este

Scanned with OKEN Scanner

foarte util, deoarece ușurează studiul anumitor fenomene și oferă un termen de comparație comod. Acest caz ideal de fluid constituie o aproximație satisfăcătoare pentru un număr mare de fluide, dacă vitezele acestora sînt mai mici decît viteza sunetului.

Să considerăm în interiorul unui fluid o placă rigidă foarte subțire, ce separă două regiuni ale fluidului. Acțiunea reciprocă a părților de fluid, situate de o parte și de alta a plăcii, se manifestă prin forțe ce se exercită pe cele două fețe ale plăcii. Într-un fluid ideal, forța de interacțiune ce se exercită pe fețele plăcii este în fiecare punct normală pe aceste fețe, oricare ar fi orientarea plăcii introduse în fluid. Această forță se exercită și în absența plăcii, pe orice element de suprafață din fluid. Să presupunem că pe elementul de suprafață ΔS din fluid se exercită forța ΔF, atunci mărimea

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \tag{8.1}$$

reprezintă presiunea în fluid și este un scalar. Valoarea presiunii care acționează pe elementul de suprafață ΔS este independentă de orientarea acestui element.

8.2. **Hidrostatica** studiază lichidele în repaus. În fiecare punct din interiorul lichidului în repaus, presiunea are aceeași valoare în toate direcțiile.

8.3. **Presiunea hidrostatică.** Lichidul în echilibru se află numai sub acțiunea propriei greutăți. Datorită greutății lor, păturile de lichid care se află în contact exercită presiuni unele asupra altora: în caz de echilibru, presiunea se numește *presiune hidrostatică*.

În vederea determinării presiunii hidrostatice, alegem ca sistem de referință pereții vasului în care se află lichidul. Limităm un volum ΔV de lichid de formă paralelipipedică cu suprafața bazei S și înălțimea Δz (fig.8.1,*a*). Lichidul cuprins în volumul ΔV are masa $\Delta m = \rho S \Delta z$ și greutatea $\Delta G = \rho g S \Delta z$, ρ fiind densitatea lichidului. Presiunea exercitată de către lichid pe fața inferioară a paralelipipedului, aflată la nivelul z, are valoarea p. Pe fața superioară aflată la nivelul $z + \Delta z$ se exercită presiunea $p + \Delta p$. Forțele de apăsare exercitate de către lichid pe fețele paralelipipedului sînt normale pe aceste fețe. Forțele care acționează pe fețele laterale își anulează reciproc efectele, ele avînd

Scanned with OKEN Scanner

valori egale și fiind de sens opus. Pe fața superioară și pe cea inferioară acționează forța $(p+\Delta p)\cdot S$ respectiv pS (fig. 8.1, *b*). Scriind condiția

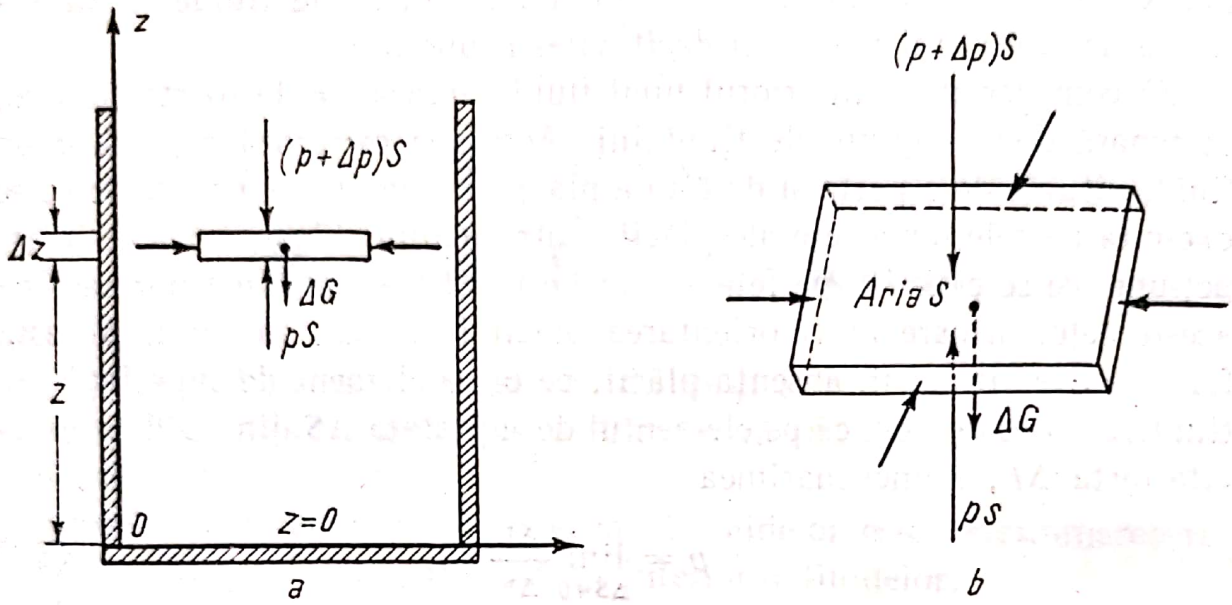


Fig. 8.1, a și b. Determinarea presiunii hidrostatice.

de echilibru pentru paralelipiped în proiecție pe axa verticală *Oz*, obținem:

$$pS - (p + \Delta p)\, S - \rho g\, S\, \Delta z = 0,$$

de unde

$$\Delta p = - \rho g\, \Delta z, \tag{8.2}$$

unde Δp este diferența de presiune între nivelurile z și $z+\Delta z$. Mărimile ρ și g fiind pozitive, rezultă că pentru Δz pozitiv (creșterea nivelului lichidului) va corespunde o variație a presiunii, Δp, negativă (descreșterea presiunii).

Dacă p_1 și p_2 sînt presiunile la nivelurile z_1 și z_2, măsurate față de același sistem de referință, relația (8.2) dă

$$p_2 - p_1 = - \rho g\, (z_2 - z_1), \tag{8.3}$$

sau

$$| p_2 - p_1 | = \rho g h, \tag{8.4}$$

unde h este grosimea stratului de lichid. Putem să enunțăm principiul fundamental al hidrostaticii: *diferența de presiune între două puncte din-*

tr-un lichid în echilibru este numeric egală cu greutatea unei coloane din acel lichid avînd ca bază unitatea de suprafaţă şi ca înălţime distanţa dintre planele care conţin punctele respective. Dacă la nivelul 1 presiunea este p, iar nivelul 2 coincide cu suprafaţa liberă a lichidului, atunci

$$p_a - p = -\rho g h \text{ sau } p = p_a + \rho g h, \tag{8.5}$$

p_a fiind presiunea atmosferică.

Se constată că presiunea hidrostatică este independentă de forma vasului în care se află lichidul şi că este aceeaşi în toate punctele aflate la aceeaşi adîncime în lichid. Din relaţia (8.5) rezultă că dacă se măreşte presiunea pe suprafaţa liberă a lichidului, presiunea p din interiorul lichidului creşte cu aceeaşi cantitate.

Cu ajutorul relaţiilor (8.4) şi (8.5) se poate calcula numai diferenţa a două presiuni şi nu presiunea într-un punct din interiorul lichidului.

Reamintim unităţile de presiune:

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = L^{-1} M T^{-2} = 1 \ N/m^2.$$

Alte unităţi tolerate, folosite curent, sînt următoarele:

Torrul (sau mm Hg) este egal cu presiunea exercitată de o coloană de mercur înaltă de 1 mm la 0°C şi în cîmp gravitaţional normal.

Folosind (8.4) rezultă

$$1 \text{ Torr} = [\rho g h] = 13{,}5951 \cdot 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)} \cdot 9{,}80665 \text{ (m/s}^2\text{)} \cdot 10^{-3} \text{m} = 133{,}322 \text{ N/m}^2 \cong 133{,}3 \text{ N/m}^2.$$

O atmosferă fizică este egală cu 760 Torr:

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr} = 760 \cdot 133{,}322 \text{ N/m}^2 = 101325 \text{ N/m}^2 \approx \approx 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Atmosfera tehnică este egală cu:

$$1 \text{ atm} = 1 \text{ kgf/cm}^2 = 98066{,}5 \text{ N/m}^2 \cong 9{,}8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2,$$

$$1 \text{ atm} = 1{,}033 \text{ at.}$$

8.4. **Legea lui Pascal.** Să umplem cu apă un vas reprezentat schematic în figura 8.2 şi să-l astupăm cu două dopuri. Apăsînd pe dopul D_1, dopul D_2 va fi aruncat în afara vasului. Acţiunea exercitată pe dopul D_1 este transmisă pe faţa inferioară a dopului D_2 prin intermediul

Scanned with OKEN Scanner

lichidului în repaus. Experiența descrisă mai sus ilustrează legea lui Pascal care se enunță astfel:

Presiunea exercitată din exterior la suprafața unui lichid incompresibil se transmite cu aceeași intensitate în toate direcțiile în lichid (fig.8.2).

Legea lui Pascal poate fi dedusă și teoretic din conservarea energiei:

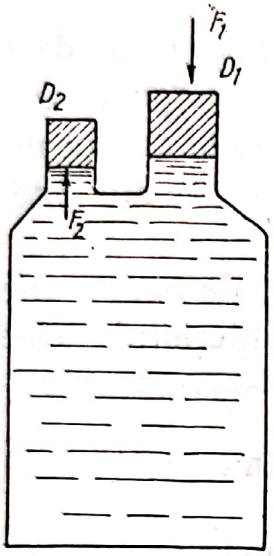


Fig. 8.2. Verificarea legii lui Pascal.

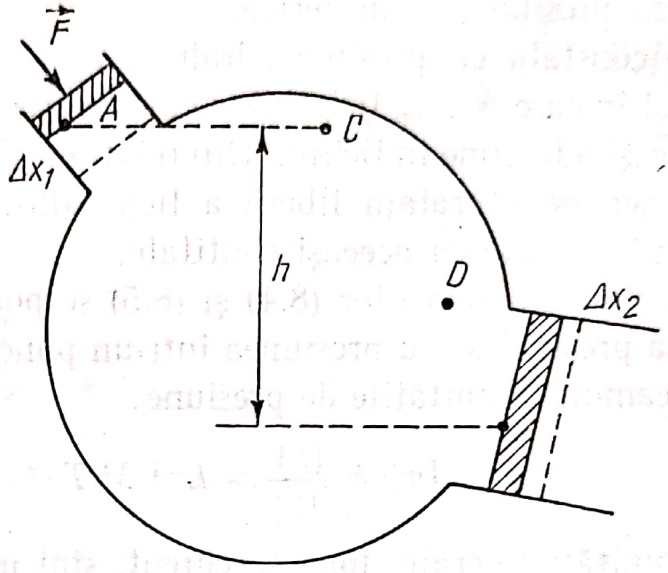


Fig. 8.3. Demonstrarea legii lui Pascal.

lucrul mecanic efectuat de forța F_1 pe distanța Δx_1 trebuie să fie egal cu lucrul mecanic al forței F_2 pe distanța Δx_2 (fig. 8.3).

$$F_1 \Delta x_1 = F_2 \Delta x_2,$$

dar din condiția de incompresibilitate: $S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2$, de unde împărțind membru cu membru egalitățile de mai sus rezultă:

$$F_1/S_1 = F_2/S_2 = p. \qquad (8.6)$$

Cu ajutorul legii lui Pascal se explică funcționarea preselor hidraulice.

8.5. **Legea lui Arhimede.** *Un corp cufundat într-un fluid este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit de corp.*

Legea poate fi demonstrată teoretic, de exemplu pe baza formulei (8.4).

Un alt raționament simplu este următorul. Să delimităm în interiorul fluidului un volum oarecare V de fluid. Putem presupune de

Scanned with OKEN Scanner

exemplu, că l-am delimitat printr-o peliculă infinit de subțire, imponderabilă, perfect flexibilă și inextensibilă, ceea ce nu modifică cu nimic echilibrul volumului de fluid astfel delimitat (fig. 8.4). Asupra acestui volum acționează forța de greutate $\vec{G}=m\vec{g}$, precum și forțele de presiune exercitate de restul fluidului, care sînt perpendiculare pe elementele

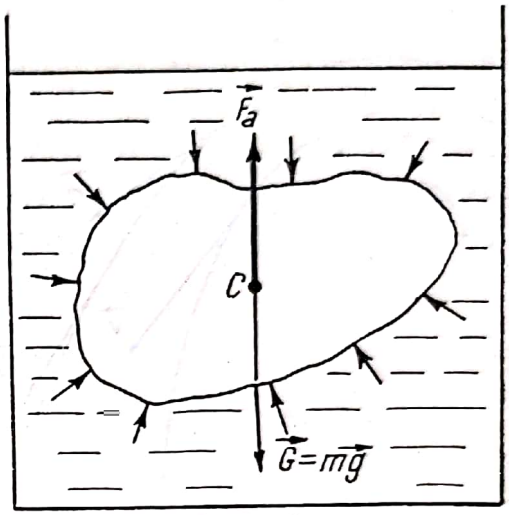


Fig. 8.4. Demonstrarea legii lui Arhimede.

de suprafață ΔS ce formează suprafața care delimitează volumul V. Deoarece acest volum de fluid este în echilibru, rezultanta tuturor forțelor de presiune exercitate normal pe suprafața sa de restul fluidului trebuie să fie egală și de sens opus cu greutatea $\vec{G}=m\vec{g}$ a fluidului delimitat, cu punctul de aplicație în centrul de greutate al volumului de fluid considerat. Dacă în locul volumului delimitat V avem un corp oarecare de același volum, forțele de presiune nu se schimbă deci *rezultanta forțelor de presiune exercitate asupra unui corp oarecare cufundat în fluid este egală și de sens opus cu greutatea volumului de fluid dezlocuit de corp, avînd punctul de aplicație în centrul de greutate al volumului de fluid dezlocuit (centrul de presiune).*

Greutatea aparentă a unui corp cufundat într-un fluid va fi

$$G_a = mg - \rho_f Vg = mg\,(1 - \rho_f/\rho_s).$$

Dacă $\rho_f < \rho_s$ corpul se cufundă; dacă $\rho_f > \rho_s$ corpul se ridică la suprafață (plutește).

8.6. **Mișcarea fluidelor.** Prin mișcarea unui fluid se înțelege deplasarea acestuia față de un sistem de referință dat. Un fluid ideal

Scanned with OKEN Scanner

poate fi pus în mișcare datorită greutății sale și diferenței de presiune între diferitele puncte din interiorul său.

Fenomenele de mișcare a fluidelor au un caracter macroscopic, fluidele fiind asimilate cu medii continue. În cazul fluidelor continue este posibilă o mișcare care să constea în deplasarea diferitelor părți ale aceluiași corp una față de alta. Pentru descrierea mișcării unui fluid, îl vom considera alcătuit dintr-un număr foarte mare de particule, caracterizate prin aceea că au un volum foarte mic în raport cu acela al corpului, însă foarte mare în raport cu distanțele dintre molecule.

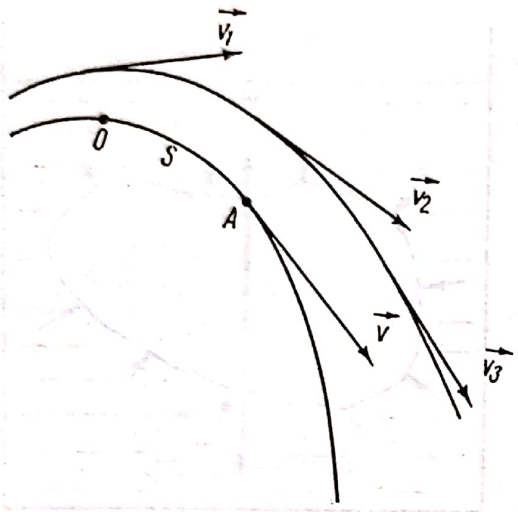


Fig. 8.5. Linii de curent în interiorul unui fluid ideal. În cazul mișcării staționare acestea coincid cu traiectoriile particulelor de fluid. Poziția unei particule de fluid pe linia de curent se poate determina cu ajutorul abscisei curbilinii *s*, luată de-a lungul liniei de curent.

Studiem mișcarea particulelor fluidului în raport cu un anumit sistem de referință, în raport cu care fixăm pozițiile particulelor de fluid.

Mișcarea unui fluid este caracterizată prin distribuția vitezelor și presiunilor în interiorul fluidului. Aceste mărimi variază de la un punct la altul. În același punct ele pot varia de asemenea, în funcție de timp. În acest caz mișcarea fluidelor se numește *nepermanentă (nestaționară)* sau *variată*. De viteză este legată și noțiunea de *linie de curent. Se numește linie de curent la un moment dat t, linia curbă care are proprietatea că, la acel moment, vitezele diferitelor particule care se află pe ea îi sînt tangente* (fig. 8.5). În general, aceste particule au traiectorii care nu se confundă cu linia de curent pe care se află ele la momentul *t*.

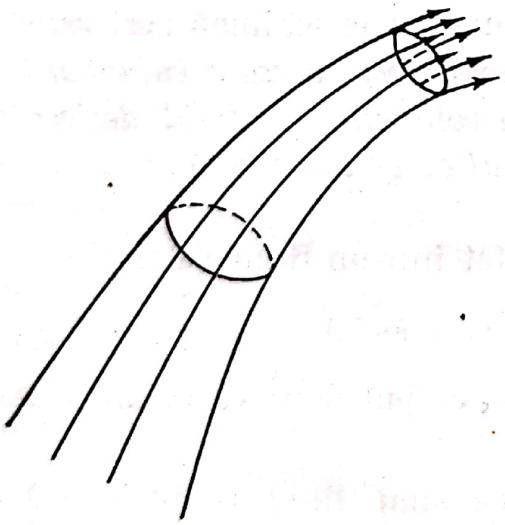


Fig. 8.6. Tub de curent.

Cînd viteza în diferitele puncte ale spațiului ocupat de fluid nu

Scanned with OKEN Scanner

depinde explicit de timp, ci numai de poziția în care se află particula de fluid considerată, avem un *cîmp de viteze staționar*. Mișcarea se numește *staționară*. În acest caz particulele de fluid care trec printr-un punct geometric M au în acea poziție o viteză ce depinde de M, oricare ar fi momentul trecerii lor prin M.

În cazul mișcării nepermanente, forma liniilor de curent se schimbă de la un moment la altul. În cazul mișcării în regim permanent, aspectul liniilor de curent rămîne neschimbat, forma lor fiind independentă de timp și atunci traiectoriile particulelor de fluid coincid cu liniile de curent. În mișcarea staționară putem fixa poziția unei particule de fluid de-a lungul liniei de curent cu ajutorul abscisei curbilinii s. Cum viteza și presiunea variază de la un punct la altul, înseamnă că ele sînt funcții de s:

$$v = v(s); \qquad p = p(s). \tag{8.7}$$

În curgerea staționară liniile de curent nu se intersectează. Astfel, liniile de curent, în cazul fluidului ideal, pot materializa pereții unui tub, prin care curge fluidul. De aceea liniile de curent care trec prin toate punctele unui contur închis formează un *tub de curent* (fig. 8.6).

8.7. **Ecuația de continuitate.** *Cantitatea de fluid care străbate o anumită arie în unitatea de timp reprezintă debitul de fluid prin acea arie.* Debitul poate fi de masă sau de volum, după cum cantitatea de fluid reprezintă o masă sau un volum de fluid.

Să considerăm un fluid în mișcare staționară și din acesta să separăm un tub de curent (fig. 8.7). Debitul prin ariile S_1 și S_2 are valorile:

$$Q_1 = \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = S_1 v_1; \qquad Q_2 = S_2 v_2.$$

Fluidul fiind incompresibil, ariile S_1 și S_2 sînt străbătute de aceeași cantitate de fluid în unitatea de timp, deci:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \tag{8.8}$$

aceasta este *ecuația de continuitate*.

În porțiunea îngustă a unei conducte cu secțiunea variabilă, viteza particulelor de lichid crește, ele mișcîndu-se accelerat.

8.8. **Ecuația lui Bernoulli** se aplică curgerii staționare a unui fluid ideal. Pentru a deduce această ecuație delimităm o porțiune de fluid, sub forma unui tub de curent foarte subțire, prin secțiunile S_1

Scanned with OKEN Scanner

și S_2 (fig. 8.8), pentru ca presiunea și viteza să varieze puțin de la un punct la altul într-o secțiune.

Notăm cu p_1 și v_1 presiunea și viteza fluidului în secțiunea S_1 și cu p_2 și v_2 valorile aceleași mărimi în secțiunea S_2. Aplicăm masei de

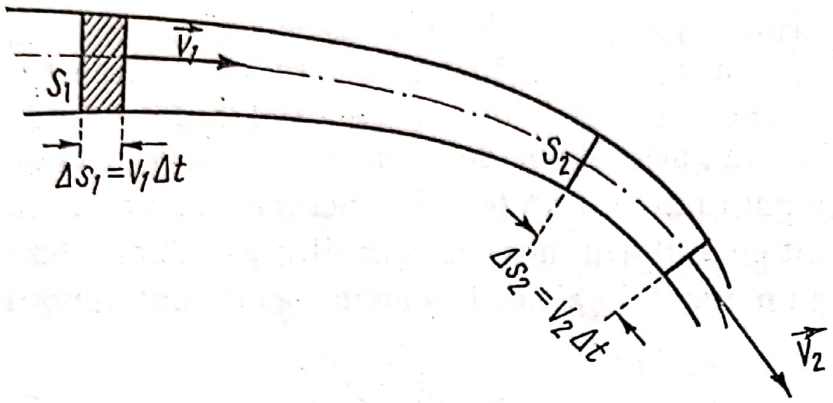


Fig. 8.7. Debitul de-a lungul unui tub de curent de fluid ideal în regim permanent este constant: $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

fluid, delimitată în modul arătat mai sus, teorema variației energiei mecanice.

Într-un interval de timp Δt fluidul aflat la stînga secțiunii AA' împinge coloana de fluid pînă în poziția A_1A_1'. Forța de presiune de mă-

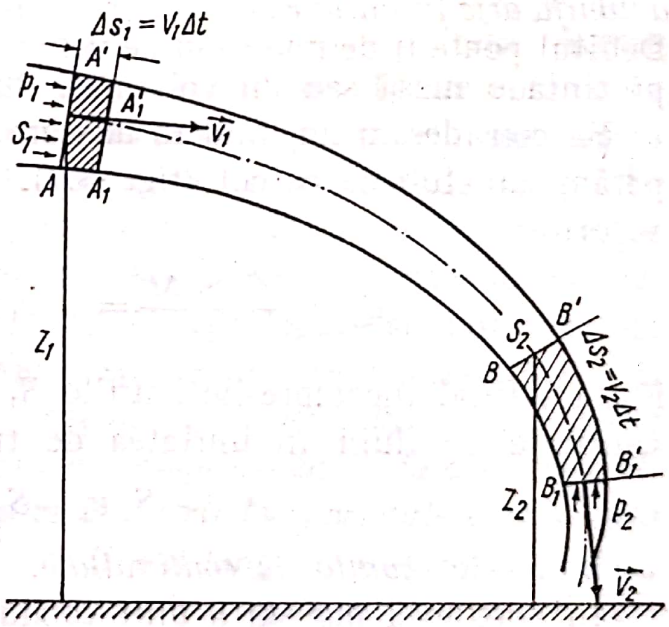


Fig. 8.8. De-a lungul liniei de curent;

$$p + \frac{1}{2} v^2 + \rho g z = \text{constant}.$$

rime $F_1 = p_1 S_1$, care acționează pe secțiunea S_1 efectuează un lucru mecanic pozitiv $p_1 S_1 v_1 \Delta t$. În același interval de timp coloana de fluid apasă asupra fluidului ce se află dincolo de secțiunea BB', împingîndu-l

Scanned with OKEN Scanner

pînă în poziția $B_1B'_1$. Forța de presiune de mărime $F_2 = p_2S_2$, exercitată de fluidul aflat dincolo de secțiunea BB' asupra fluidului din porțiunea limitată de secțiunile AA' și BB', execută un lucru mecanic negativ egal cu $-p_2S_2V_2\Delta t$. Pe suprafața laterală a tubului de curent nu se efectuează lucru mecanic, deoarece nu există forțe de frecare (fluid ideal fără viscozitate). Fluidul fiind incompresibil trebuie ca:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \Delta V.$$

În intervalul de timp Δt totul se petrece, în tubul de curent, ca și cum s-ar transfera din porțiunea AA_1 o masă de fluid $\Delta m = \rho \Delta V$, cu energia cinetică $\frac{1}{2}(\Delta m)\, v_1^2$ și energia potențială $(\Delta m) g z_1$, în porțiunea BB_1 unde are energia cinetică $\frac{1}{2}(\Delta m)\, v_2^2$ și energia potențială $(\Delta m)\, gz_2$. Variația energiei mecanice, cinetice și potențiale a sistemului este:

$$\Delta E = \frac{1}{2}(\Delta m)\ (v_2^2 - v_1^2) + (\Delta m)\, g\, (z_2 - z_1)$$

și ea trebuie să fie egală cu lucrul mecanic al forțelor de presiune exercitate asupra sistemului considerat: $(p_1 - p_2)\, \Delta V$, deci

$$(p_1 - p_2)\, \Delta V = \frac{1}{2}(\Delta m)\ (v_2^2 - v_1^2) + (\Delta m)\, g\, (z_2 - z_1).$$

Deoarece $(\Delta m) = \rho\, \Delta V$, rezultă:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho g\, z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g\, z_2. \qquad (8.9)$$

Aceasta este ecuația lui Daniel Bernoulli (1700—1782).

Ecuația lui Bernoulli se mai scrie și astfel:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g\, z = \text{const.} = C. \qquad (8.10)$$

În relația (8.10) toți termenii din membrul întîi au dimensiunile unei presiuni. Pentru a-i distinge în enunțuri, se obișnuiește (fără de a fi absolut necesar) să se utilizeze denumirile „presiunea statică" pentru p, „presiunea dinamică" pentru $\frac{1}{2}\rho v^2$, „presiunea de poziție" pentru ρgz, termen datorit energiei potențiale.

Scanned with OKEN Scanner

În calculul acțiunii fluidului asupra unui perete, pe elementul de suprafață ΔS se va exercita o forță de mărime $p\Delta S$, unde p se scoate din formula (8.10).

Constanta C este aceeași de-a lungul liniei de curent și este independentă de timp.

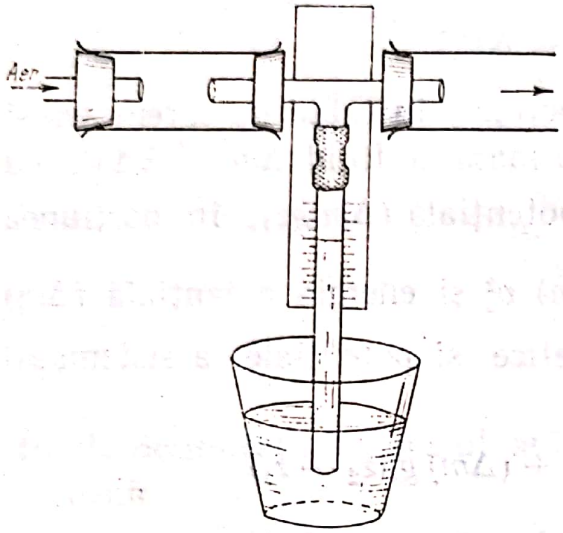


Fig. 8.9. Presiunea statică în porțiunea îngustă a unei conducte poate să scadă sub valoarea presiunii atmosferice.

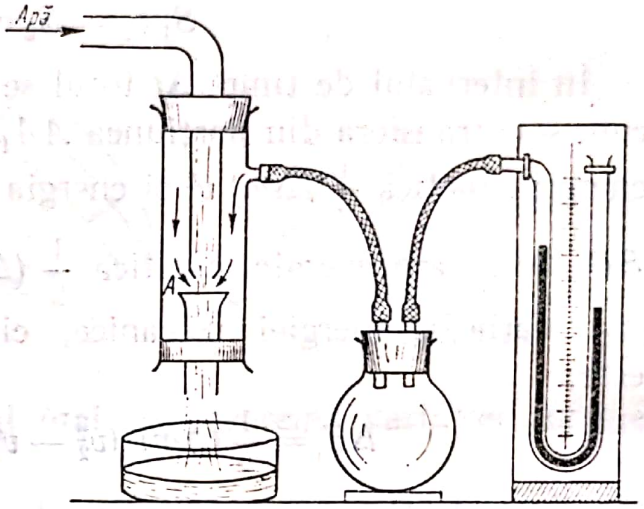


Fig. 8.10. Trompa de apă.

În cazul particular cînd tubul de curent este practic orizontal sau cînd energia potențială este neglijabilă, obținem:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = C. \tag{8.11}$$

În porțiunile înguste ale conductei prin care curge un fluid, viteza acestuia crește, deci crește și presiunea dinamică, de aceea trebuie să se scadă presiunea statică, pentru ca suma lor să rămînă constantă. Presiunea statică la gîtuitură poate scădea sub presiunea atmosferică, astfel apare fenomenul de aspirație (fig. 8.9) pe care se bazează unele aplicații practice, cum ar fi pulverizatorul, lampa Bunsen, trompa de apă (fig. 8.10).

Trompa de apă funcționează astfel: în regiunea A presiunea dinamică crește, scade presiunea statică și ia naștere absorbția aerului din vas, aer care este antrenat de jetul de apă.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația lui Bernoulli se mai poate scrie și sub forma:

$$(\Delta m)\, gz + (1/2)\, (\Delta m)\, v^2 + p\, \Delta V = \text{constant}.$$

Termenii din primul membru al egalității de mai sus reprezintă: energia potențială $(\Delta m)gz$, energia cinetică $(1/2)\ (\Delta m)\ v^2$ și energia datorată forțelor de presiune. Ecuația lui Bernoulli exprimă legea conservării energiei, în lungul unui tub de curent. Formele de energie menționate sînt susceptibile la transformări reciproce, însă energia totală a elementului Δm rămîne constantă.

8.9. **Aplicații**

a) *Sonda de presiune* este un tub manometric montat perpendicular

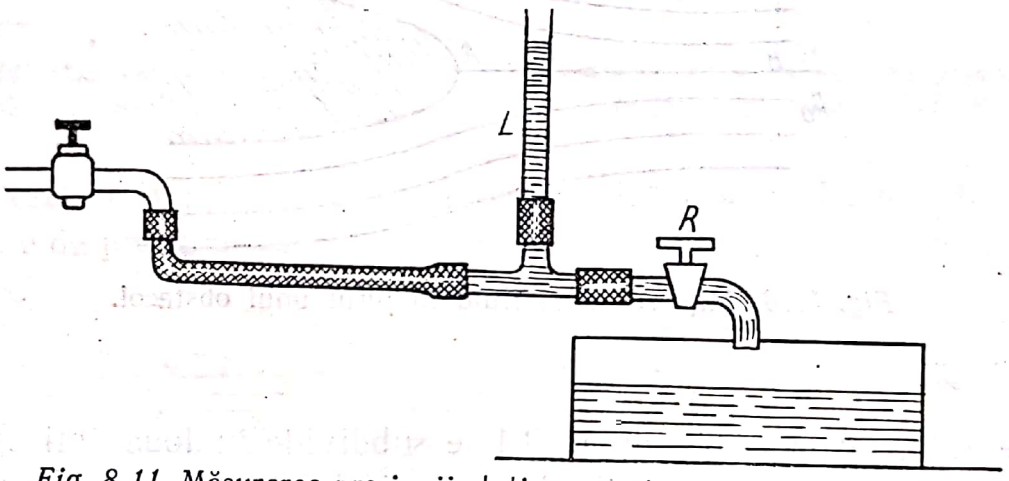


Fig. 8.11. Măsurarea presiunii statice a apei cu ajutorul sondei de presiune. Se măsoară presiunea statică mai întîi cînd robinetul R este deschis, apoi cînd robinetul R este închis și se constată o diferență între cele două presiuni.

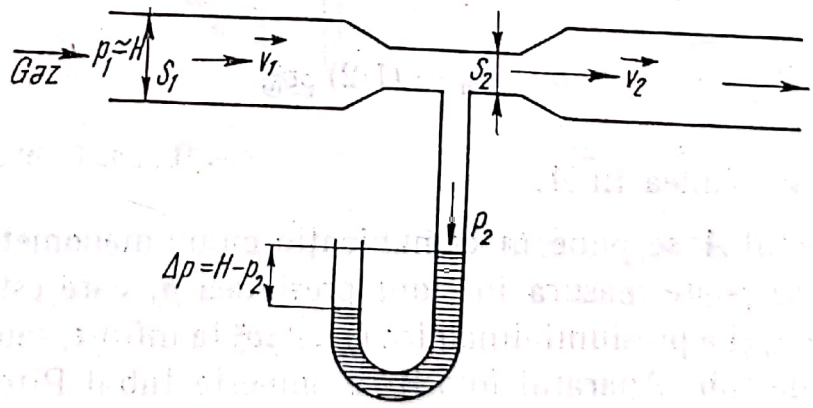


Fig. 8.12. Măsurarea presiunii statice a unui gaz cu ajutorul sondei de presiune.

pe o conductă prin care curge un fluid și care servește la determinarea presiunii statice a fluidului (fig. 8.11 și 8.12).

Scanned with OKEN Scanner

b) *Tubul Pitot* se folosește pentru măsurarea presiunii totale exercitate asupra unui element de suprafață așezat perpendicular pe liniile de curent.

Dacă într-un fluid se află un obstacol (fig. 8.13), în punctul A curgerea este împiedicată, viteza în A fiind nulă. Liniile de curent

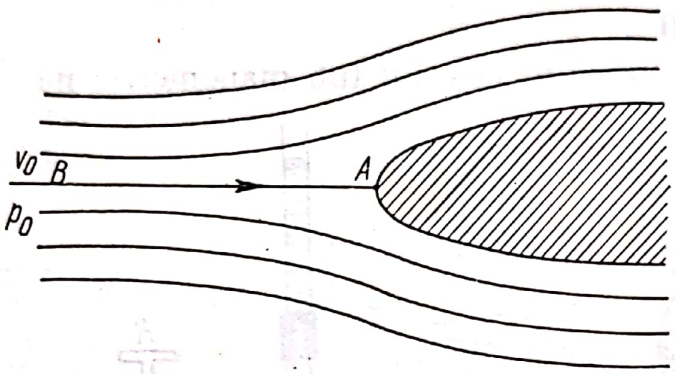


Fig. 8.13. Mișcarea unui fluid în jurul unui obstacol.

sînt deviate, iar linia de curent BA se subdivide în două linii care urmează conturul obstacolului.Scriind ecuația lui Bernoulli pentru punctul A și pentru punctul de la infinit unde presiunea este p_0 și viteza v_0, obținem:

$$p = p_0 + (1/2)\,\rho v_0^2, \tag{8.12}$$

unde p este presiunea în A.

Dacă punctul A se pune în comunicație cu un manometru printr-un tub subțire, se poate măsura în fluid presiunea p, care este suma presiunii statice p_0 și a presiunii dinamice $(1/2)\,\rho v_0^2$ la infinit, sau în curentul neperturbat de tub. Aparatul folosit se numește tubul Pitot și este alcătuit dintr-un tub cu diametrul mult mai mic în raport cu diametrul secțiunii transversale a conductei prin care curge fluidul (fig. 8.14 și 8.15). Dacă se determină prin alt mijloc presiunea p_0 se poate calcula viteza fluidului v_0.

Scanned with OKEN Scanner

c) *Tubul Prandtl* este folosit pentru măsurarea presiunii dinamice (fig. 8.16). Tubul Prandtl se introduce într-un fluid ce se află în mișcare față de tub cu viteza de translație v_2. La orificiul A, de intrare,

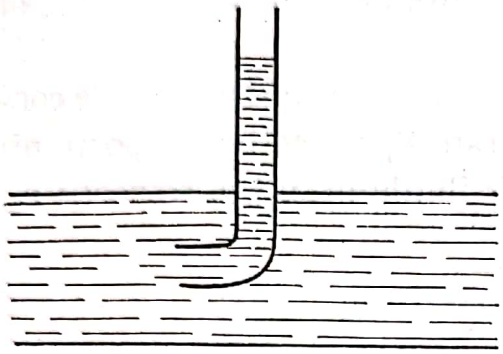


Fig. 8.14. Măsurarea presiunii în lichide cu tubul lui Pitot.

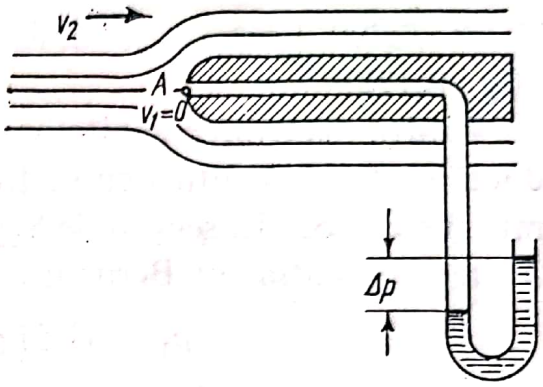


Fig. 8.15. Măsurarea presiunii în gaze cu tubul lui Pitot.

viteza este nulă $v_1 = o$, iar presiunea statică este p. În punctul B, la orificiile de presiune statică, viteza este sensibil egală cu aceea a curen-

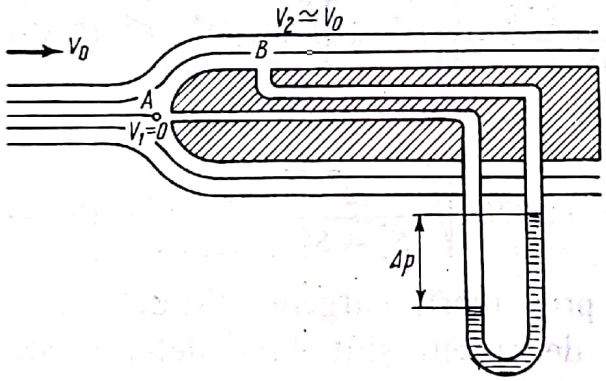


Fig. 8.16. Tubul Prandtl.

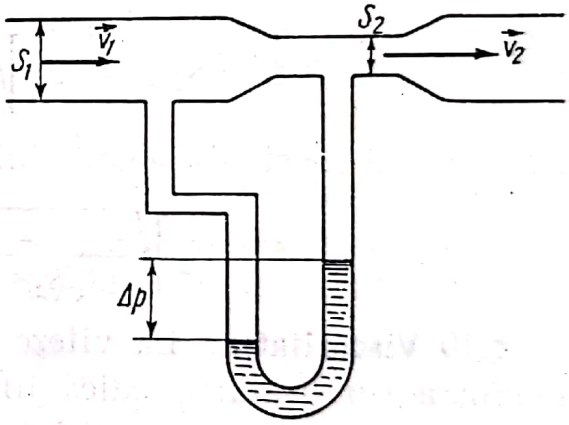


Fig. 8.17. Tubul Venturi.

tului de fluid, $v_2 \simeq v_0$, iar presiunea este corespunzătoare acestei viteze, adică p_0. Aplicînd ecuația lui Bernoulli în punctele A și B obținem:

$$p + o = p_0 + (1/2)\,\rho v_0^2$$

din care obținem

$$\Delta p = \rho \frac{v_0^2}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația de mai sus obținem mărimea vitezei v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}.$$

d) *Tubul Venturi* se folosește la măsurarea debitelor fluidelor (fig. 8.17).

Pentru măsurarea debitelor se înlocuiește o porțiune orizontală de conductă cu tubul Venturi cu secțiunea de intrare S_1 și secțiunea porțiunii mai înguste S_2. În secțiunile S_1 și S_2 vitezele fluidului sînt v_1 respectiv v_2. Aplicînd ecuația lui Bernoulli obținem:

$$p_1 + (1/2)\,\rho v_1^2 = p_2 + (1/2)\,\rho v_2^2,$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (1/2)\,\rho\,(v_2^2 - v_1^2).$$

Folosind ecuația de continuitate în relația de mai sus obținem:

$$\Delta p = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right] v_1^2.$$

Debitul de volum este dat de relația

$$Q = S_1 v_1 = S_1 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho[(S_1/S_2)^2 - 1]}} = k\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}, \qquad (8.13)$$

unde k este constanta aparatului:

$$k = S_1 \sqrt{\frac{2}{(S_1/S_2)^2 - 1}} = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2}{S_1^2 - S_2^2}} \qquad (8.14)$$

8.10 **Viscozitatea**. La viteze nu prea mari, curgerea fluidelor este laminară (în straturi), adică liniile de curent sînt bine determinate și nu se intersectează nicăeri între ele, fiecare particulă de fluid rămîne mereu în interiorul unui același tub de curent. La viteze mari, mișcarea devine turbulentă, neregulată, porțiunile de fluid se amestecă și se formează vîrtejuri.

Să ne imaginăm două suprafețe plane așezate la o anumită distanță una de alta într-un fluid vîscos în repaus (fig. 8.18). Dacă acționăm cu o forță asupra uneia dintre suprafețe, deplasînd-o în propriul său plan, cealaltă suprafață are tendința de a se deplasa în aceeași direcție. Ne putem închipui că în interiorul lichidului deci și între cele două suprafețe plane există mai multe straturi paralele care alunecă unele față de

Scanned with OKEN Scanner

altele, între care apar forțe de frecare internă sau de viscozitate. Stratul care se află în contact cu suprafața mobilă are aceeași viteză ca și aceasta, în timp ce lichidul în contact cu cealaltă suprafață se află în repaus. Viteza straturilor intermediare crește uniform de la o suprafață la alta, cum arată fig. 8.18 . Stratul cu viteză mai mare caută să

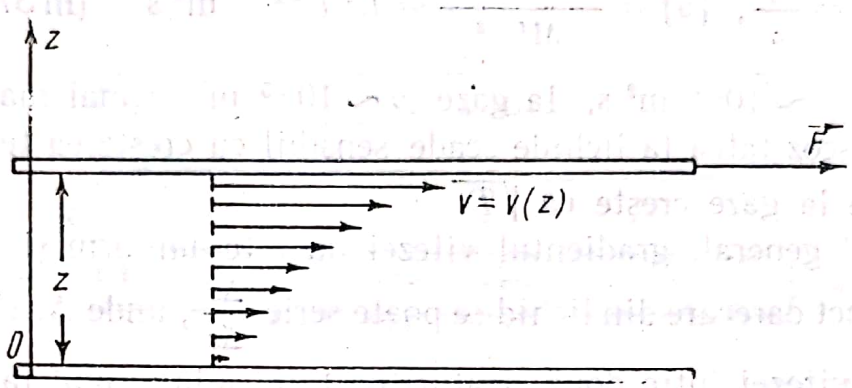


Fig. 8.18. Curgerea laminară a fluidelor.

accelereze stratul cu viteză mai mică peste care el alunecă, și invers, stratul cu viteză mai mică caută să frîneze stratul cu viteză mai mare cu care este în contact. Astfel, ia naștere forța de frecare $\vec{F}$, care acționează în planurile de lunecare, a căror viteză de curgere variază de la strat la strat.

Experiența arată că forța de frecare internă care apare în planul de lunecare pe unitatea de suprafață este proporțională cu gradientul vitezei (adică cu variația vitezei pe unitatea de distanță dintre straturile de lichid vecine, în direcție perpendiculară pe mișcare):

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \frac{v}{z}, \qquad (8.15)$$

unde v/z este gradientul vitezei și η coeficientul de viscozitate (dinamică), dependent de natura fluidului (și de temperatură). Dimensiunea lui este:

$$[\eta] = \frac{L^{-1}MT^{-2}}{LT^{-1}L^{-1}} = L^{-1}\,MT^{-1} = \text{kg/m.s (în } SI) \qquad (8.16)$$

Unitatea CGS este poise P (după numele lui Poiseuille);

$$1\text{P} = 1\text{g/cm.s} = 0{,}1\ \text{kg/m.s}, \qquad (8.17)$$

deci unitatea SI este egală cu decapoise (daP).

Scanned with OKEN Scanner

La lichide, η este de ordinul a 10^{-3} daP, iar la gaze η este mai mic: $\eta \sim 10^{-5}$ daP.

Viscozitatea η împărțită prin densitatea ρ a fluidului se numește viscozitate cinematică:

$$\upsilon = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\upsilon] = \frac{L^{-1}MT^{-1}}{ML^{-3}} = L^2\,T^{-1} = \text{m}^2/\text{s} \quad (\text{în } SI) \qquad (8.18)$$

La lichide $\upsilon \sim 10^{-6}$ m^2/s, la gaze $\upsilon \sim 10^{-5}$ m^2/s (mai mare decît la lichide). Viscozitatea la lichide scade sensibil cu creșterea temperaturii, în timp ce la gaze crește ca $\sqrt{T}$.

În cazul general, gradientul vitezei nu este uniform și valoarea sa într-un punct oarecare din lichid se poate scrie $\frac{\Delta v}{\Delta z}$, unde Δv este variația modulului vitezei între două straturi de fluid aflate unul față de altul la distanța Δz, luată pe direcția perpendiculară pe mișcarea fluidului. Astfel

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z}. \qquad (8.19)$$

8.11. **Formula lui Poiseuille.** Să studiem curgerea laminară staționară a unui fluid vîscos printr-un tub. Curgerea laminară are loc la viteze nu prea mari sau la diametre nu prea mari. Să delimităm un tub de curent de rază r (fig. 8.19). Asupra fluidului din acest tub acționează forțele de presiune de la extremități cu rezultanta: $p_1\pi r^2 - p_2\pi r^2$ și forța de frecare pe suprafața laterală exercitată de restul fluidului datorită viscozității: $\tau 2\pi rl$. Curgerea fiind staționară forțele își fac echilibru ($p_1 > p_2$):

$$(p_1 - p_2)\,\pi r^2 = 2\pi\, rl\tau, \quad (p_1 - p_2)\, r = -2l\,\eta \frac{\Delta v}{\Delta z}, \qquad (8.20)$$

unde semnul minus se datorește semnului negativ al gradientului vitezei: $\Delta v/\Delta z < 0$; viteza pe axa tubului este maximă și scade spre pereții tubului, fiind nulă la perete, în stratul adiacent (fig. 8.20).

Din relația (8.20) în urma unor operații matematice ceva mai complicate care depășesc nivelul de cunoștințe ale anului II de liceu, obținem:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4l\,\eta}(R^2 - r^2), \qquad (8.21)$$

Scanned with OKEN Scanner

relație care ne dă distribuția vitezelor în lichid, în care R este raza conductei și r distanța de la axa conductei.

Debitul volumic al lichidului este dat de formula lui Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8 l \eta} R^4. \tag{8.22}$$

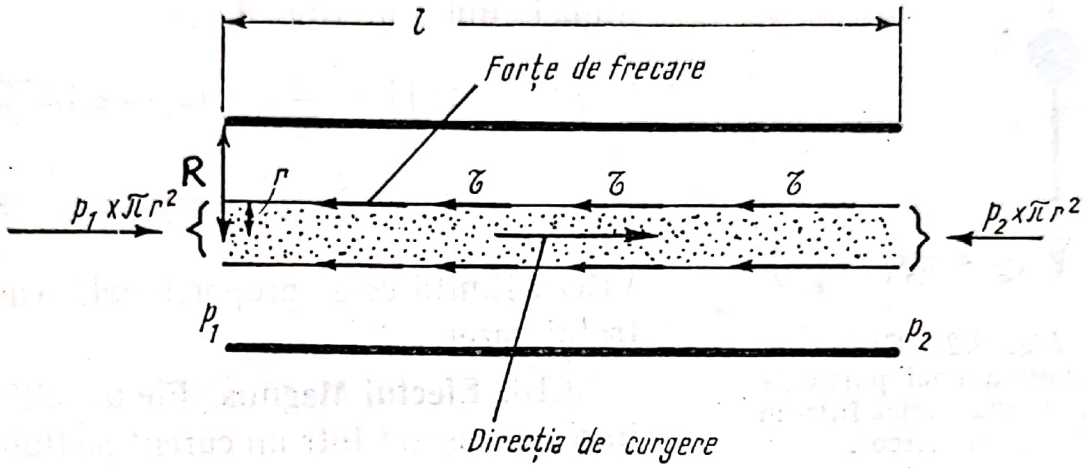


Fig. 8.19. Curgerea laminară staționară a unui fluid vîscos.

8.12. **Legea lui Stokes.** Atunci cînd un corp se mișcă cu viteză suficient de mică într-un fluid vîscos, provocînd o mișcare laminară a acestuia, mărimea forței de frecare $\vec{F}$ întîmpinată de corp este proporțională

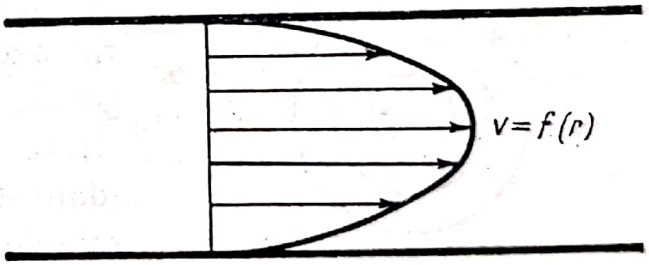


Fig. 8.20. Distribuția vitezelor într-un fluid vîscos.

cu viscozitatea fluidului η, cu dimensiunea liniară l a corpului și cu viteza sa v (legea lui Stokes):

$$F = \text{const}\ \eta\ l\ v. \tag{8.23}$$

În cazul sferei se obține formula lui Stokes:

$$F = 6\pi \eta r v, \tag{8.24}$$

unde r este raza sferei.

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul formulei lui Stokes se poate calcula viteza limită pe care o poate atinge un corp sferic în cădere liberă într-un fluid. La început viteza fiind mică, forța de frecare Stokes este mică și corpul cade accelerat sub acțiunea greutății aparente. La un moment dat, forța Stokes devine egală cu greutatea aparentă și sfera coboară atunci uniform (fig. 8.21).

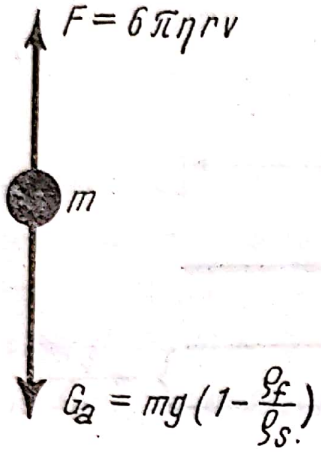


Fig. 8.21. Căderea liberă a unei particule de formă sferică într-un fluid vîscos.

$$6\pi\eta\, rv = mg\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right) = (\rho_s-\rho_f)\frac{4\pi r^3}{3}g,$$

$$v = \frac{2}{9\eta}(\rho_s-\rho_f)\, gr^2. \qquad (8.25)$$

Viteza limită este proporțională cu pătratul razei.

8.13. **Efectul Magnus.** Fie un cilindru în repaus așezat într-un curent pe fluid, în regim laminar, perpendicular pe axa cilindrului. În regiunea numerelor mici ale lui Reynolds, liniile de curent în jurul cilindrului arată ca și cele desemnate în figura 8.22, *a*. Să considerăm același cilindru într-un fluid în repaus, însă de data aceasta avînd o mișcare de rotație, în jurul axei sale în sensul arătat de săgeată. Cilindrul rotindu-se antrenează straturile de fluid din vecinătatea sa (datorită viscozității) în sensul mișcării sale de rotație. Liniile de curent în jurul cilindrului arată ca și cele din fig. 8.22, *b*.

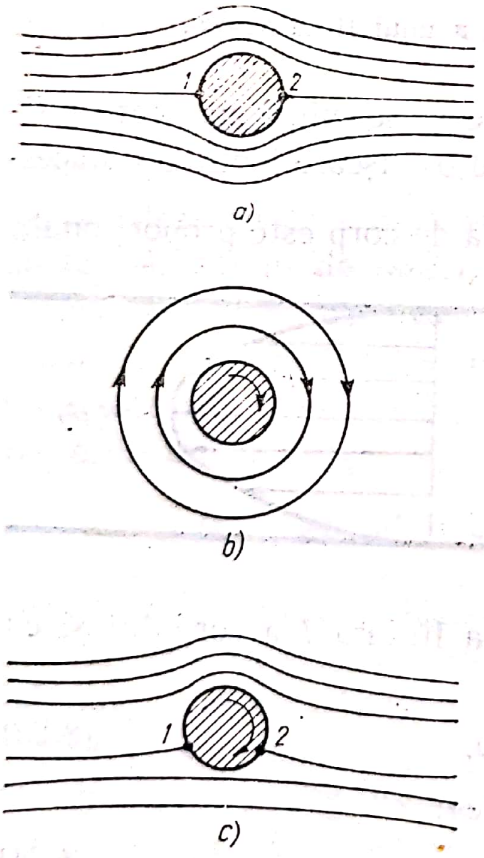


Fig. 8.22. a, b și c. Efectul Magnus.

Dacă fluidul se află în mișcare, în regim laminar, și deasemenea cilindrul se rotește, atunci datorită forțelor de frecare (viscozității) cilindrul antrenează straturile de fluid din vecinătatea sa, în sensul mișcării sale de rotație (fig. 8.22 *c*). În punctul *A* viteza fluidului va fi mai

Scanned with OKEN Scanner

mare decît în punctul B. Conform legii lui Bernoulli, presiunea laterală asupra lichidului va fi mai mare în B decît în A, astfel încît apare o forță rezultantă transversală spre partea unde viteza fluidului este mai mare. Acesta este efectul Magnus.

Efectul poate fi ilustrat punînd în rotație un cilindru de hîrtie și

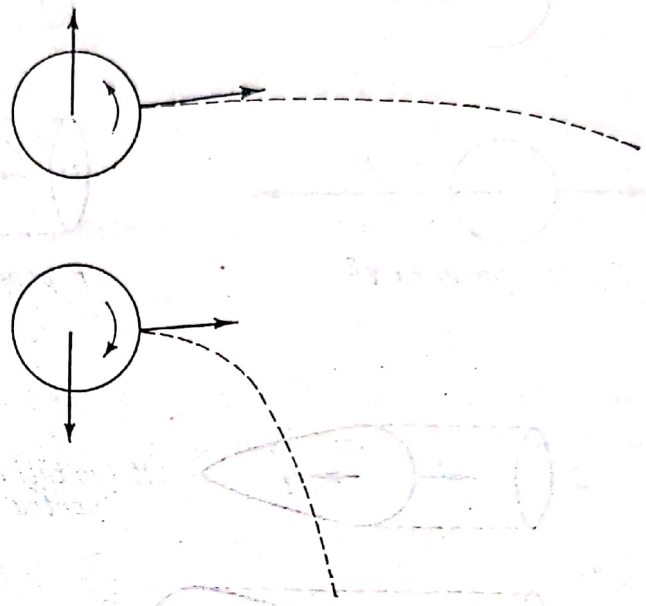


Fig. 8.23. Punerea în evidență a efectului Magnus.

aruncîndu-l orizontal. După sensul de rotație, cilindrul va curba lin sau brusc spre Pămînt (fig. 8.23).

8.14. **Curgerea turbulentă.** Dacă viteza de curgere depășește o valoare critică, regimul laminar devine instabil și trece în regim turbulent; se formează virtejuri, a căror origine este legată de forțele de frecare (viscozitate). Liniile de curent dispar; întreaga masă de fluid se mișcă dezordonat. Curgerea devine nestaționară. Viteza și presiunea

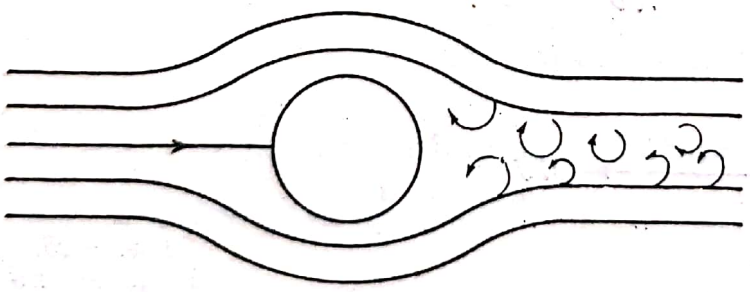
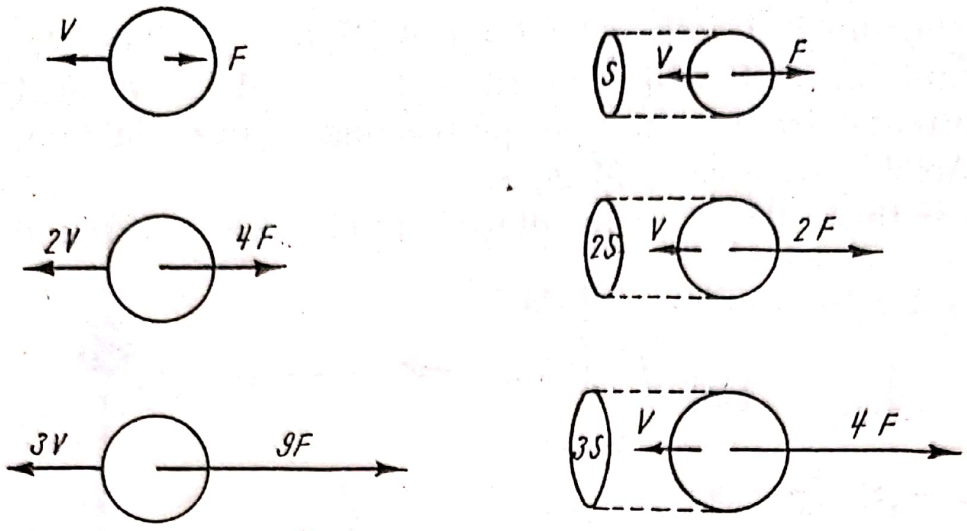


Fig. 8.24. Curgerea turbulentă.

variază în fiecare punct, fluctuează în jurul unor valori medii. Forța de rezistență exercitată asupra obiectelor crește și devine proporțională cu densitatea fluidului și cu pătratul vitezei.

Scanned with OKEN Scanner



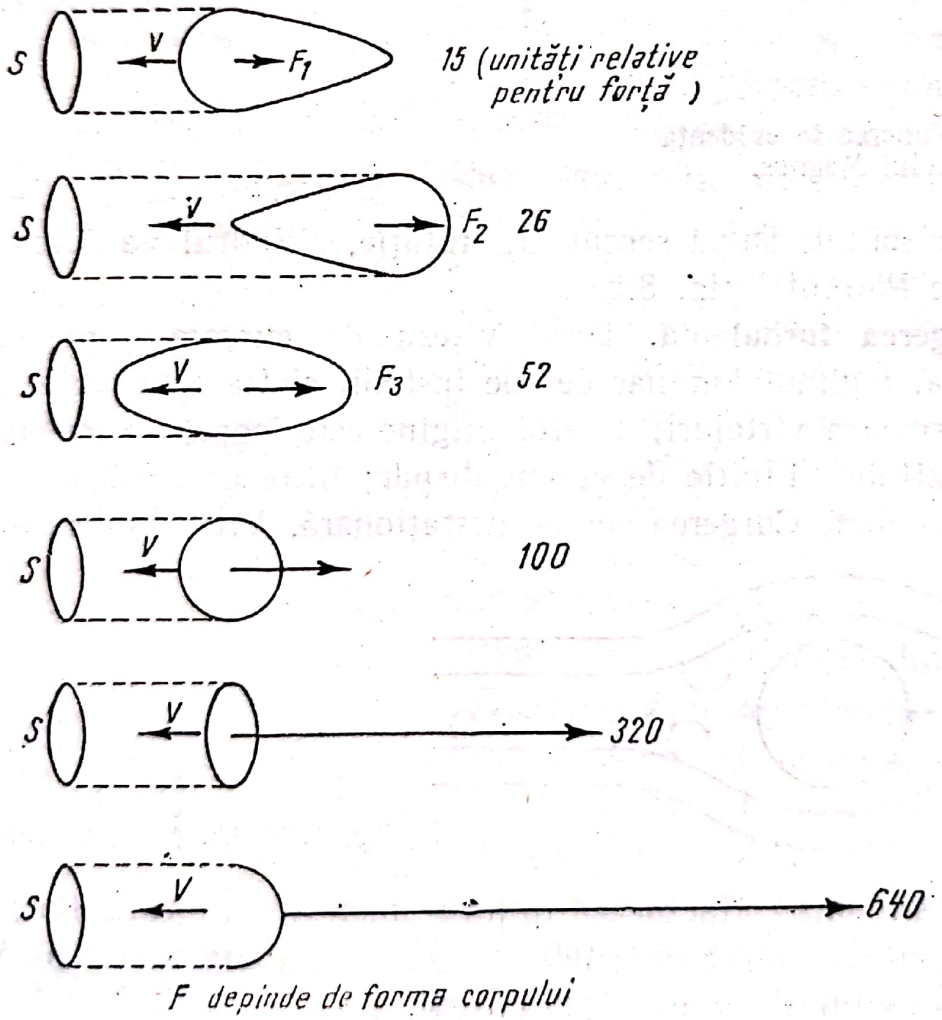


Fig. 8.25. Forța de rezistență a obiectelor aflate într-un fluid în mișcare.

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, la viteze mici, în regim laminar, predomină forţele de frecare care depind de η, de viteza relativă v a fluidului faţă de corp şi de dimensiunea liniară a corpului, l. La viteze mari, în regim turbulent, predomină efectele inerţiale, datorită energiei cinetice sau presiunii dinamice. Vîrtejurile consumă energie cinetică de rotaţie în dauna energiei cinetice de translaţie a lichidului. Formarea vîrtejurilor în urma corpului (fig. 8.24) duce la o creştere a rezistenţei la curgere faţă de regimul laminar. Vîrtejurile se amortizează treptat, energia lor cinetică transformîndu-se în căldură. Viscozitatea se manifestă doar într-un strat limită subţire.

Mărimea forţei de rezistenţă, F, este dată de formula lui Newton:

$$F = \frac{1}{2} CS\, \rho v^2, \tag{8.26}$$

unde C este o constantă adimensională, care depinde de forma corpului, S este aria secţiunii transversale, ρ densitatea fluidului şi v viteza corpului (fig. 8.25). Din (8.26), obţinem:

$$C = \frac{2F}{Sv^2}, \tag{8.27}$$

care este un număr abstract, fără dimensiuni, căci reprezintă raportul a două forţe.

8.15. **Căderea unui corp în aer; viteza limită.** Să studiem căderea unei sfere într-o atmosferă liniştită, admiţînd că densitatea aerului este independentă de altitudine şi că forţa arhimedică este neglijabilă faţă de greutatea sferei. Notăm cu r raza sferei şi cu ρ_s densitatea sa. Greutatea sferei este

$$G = Mg = (4/3)\, \pi \rho_s g r^3.$$

În mişcarea sa sfera întîmpină rezistenţa aerului $F = (1/2) C \rho S v^2$, unde $S = \pi r^2$, deci $F = \frac{1}{2} C \pi r^2 v^2$.

Aplicînd legea fundamentală a dinamicii mişcării centrului de greutate al sferei obţinem (fig. 8.26):

$$Ma = G - F \text{ sau } (4/3)\, \pi \rho_s r^3 a = (4/3)\, \pi \rho_s r^3 g - (1/2)\, C \pi \rho r^2 v^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația de mai sus obținem

$$a = g - \frac{3C\rho v^2}{8\rho_s r}. \qquad (8.28)$$

Această ecuație arată că accelerația, care inițial a fost egală cu g, descreşte pe măsură ce viteza crește. Cînd viteza a atins valoarea v_M, astfel că:

$$g = \frac{3C\rho}{8\rho_s r} v_M^2, \quad \text{adică} \quad v_M = \sqrt{\frac{8\rho_s rg}{3C\rho}}, \qquad (8.29)$$

accelerația se anulează: rezultă că viteza nu mai poate crește, ea a atins valoarea maximă.

Dacă un corp cade în aer, viteza sa tinde către o valoare limită și mișcarea devine uniformă.

8.16. **Zborul avioanelor.** Să considerăm aripa unui avion de forma unei plăci plane dreptunghiulare, care se mișcă într-o atmosferă calmă cu viteza $\vec{v}$. Fie α unghiul pe care placa îl face cu vectorul viteză $\vec{v}$ (fig. 8.27). Unghiul α se numește unghi de atac. Partea frontală a plăcii se numește bord de atac, iar partea diametral opusă se numește bord de

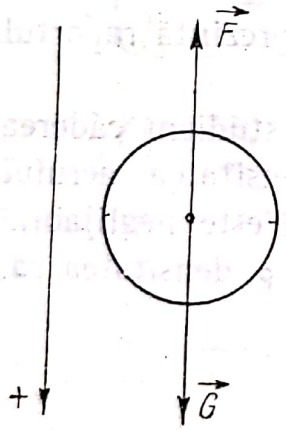


Fig. 8.26. Căderea unui corp în aer.

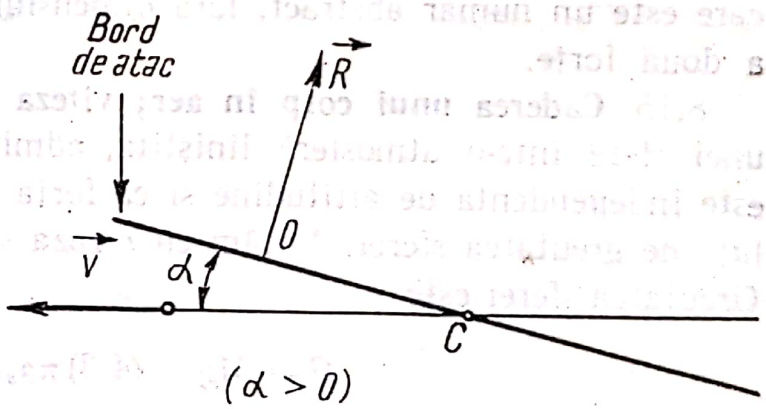


Fig. 8.27. Unghiul de atac al unei plăci plane.

fugă (fig. 8.28). Experiența arată că asupra plăcii acționează un sistem de forțe care admit o rezultantă $\vec{R}$. Aceasta satisface la următoarele condiții:

a) are punctul de aplicație O, la o treime de bordul de atac;
b) are direcția normală la placă;
c) are un astfel de sens încît tinde să mărească unghiul α;

Scanned with OKEN Scanner

d) intensitatea forței $\vec{R}$ este proporțională cu densitatea aerului, suprafața plăcii, unghiul de atac și pătratul vitezei.

$$R = C \rho \alpha S v^2 \tag{8.30}$$

Această formulă este valabilă pentru unghiuri mici de atac și pentru viteze care nu depășesc 300 km/h.

Proiectăm forța $\vec{R}$ pe o axă paralelă cu viteza și pe o axă perpendiculară pe viteză (fig. 8.29).

Proiecția $P = R \cos \alpha$ se numește portanța aripei (sau forță portantă) care învinge greutatea avionului. Componenta $T = R \sin \alpha$ se numește rezistență frontală și trebuie învinsă prin acțiunea elicei.

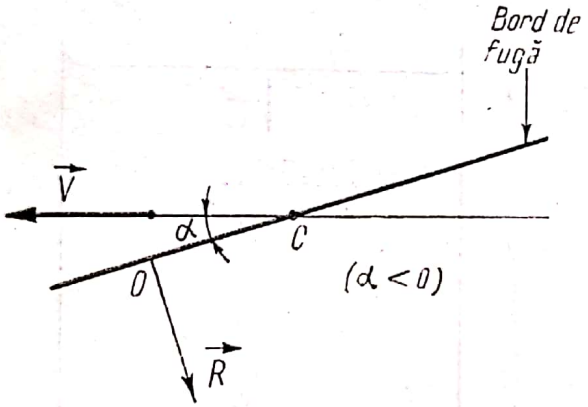


Fig. 8.28. Bordul de fugă al unei plăci plane.

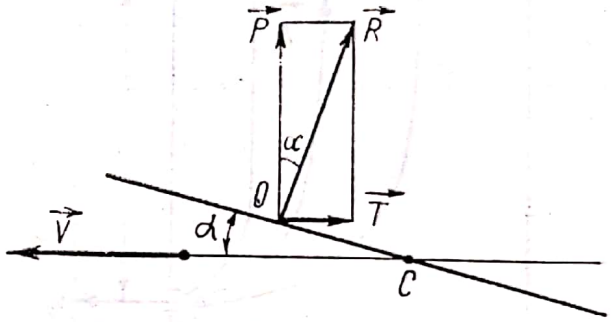


Fig. 8.29. Forța portantă.

8.17. **Probleme rezolvate**

1. Un rezervor cu apă este prevăzut cu un orificiu de secțiune foarte mică în raport cu dimensiunile rezervorului. Orificiul este astfel construit încît ghidează curgerea. Să se calculeze viteza de scurgere a apei prin acest orificiu, neglijînd frecarea (fig. 8.30 a și b).

Rezolvare:

Notăm cu h diferența de nivel dintre suprafața lichidului și orificiu, cu p_1 presiunea atmosferică, cu v_1 viteza lichidului la nivelul său superior și v_2 viteza lichidului la nivelul orificiului. Mișcarea fluidului (presupus ideal) fiind permanentă i se aplică ecuația lui Bernoulli:

$p_1 + (1/2)\,\rho v_1^2 + \rho g h = p_1 + (1/2)\,\rho v_2^2$, și ținînd seamă de ecuația

de continuitate obținem:

$$v_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}}.$$

Dacă $S_1 \gg S_2$, obținem

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad \text{(formula lui Torricelli).} \qquad (8.31)$$

Această formulă a lui Toricelli coincide cu formula lui Galilei.

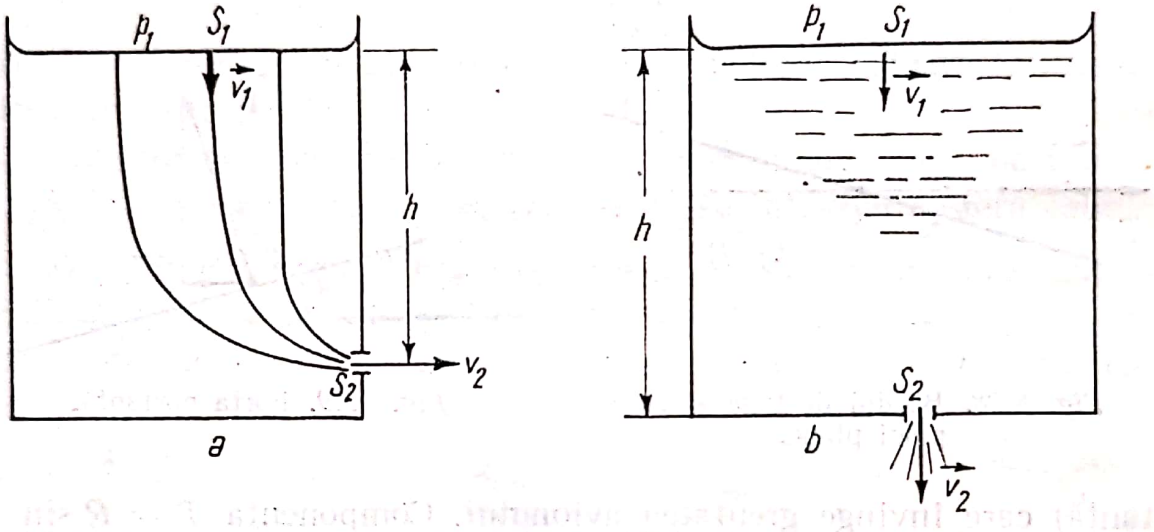


Fig. 8.30. a și *b*. Curgerea apei printr-un orificiu din peretele unui rezervor.

2. Printr-o conductă cu diametrul de 20 cm, îndoită sub un unghi de 90° (fig. 8.31) curge un curent de apă cu debitul $Q = 100$ litri pe secundă. Care este rezultanta forțelor de presiune ce se exercită asupra conductei?

Rezolvare:

În unitatea de timp trece printr-o secțiune a conductei masa de fluid $Q_m = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2$ (debitul de masă) a cărei variație de impuls este egală cu forța exercitată de conductă asupra fluidului:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{(m_2 \vec{v}_2 - m_1 \vec{v}_1)}{\Delta t} = \vec{v}_2 \rho Q - \vec{v}_1 \rho Q = \rho Q \left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $Q = S_1 v_1 = S_2 v_2$ este debitul volumic. Forța de reacțiune $\vec{F}'$ exercitată de fluid asupra conductei este

$$\vec{F}' = -\vec{F} = \rho Q (\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

de unde

$$|\vec{F}'| = \rho S \frac{Q}{S} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|, \quad F' = \rho S \frac{Q}{S} v_1 \sqrt{2} = \sqrt{2}\, \rho \frac{Q^2}{S} = 444 \ N.$$

Secțiunile S_1 și S_2 sînt egale.

Întrebări și probleme

1. Un remorcher trage două șlepuri (fig. 8.32). Pentru ce cele două șlepuri au tendința să se apropie?

2. Două mingi ușoare de cauciuc se suspendă așa cum arată figura 8.33. Dacă între cele două mingi se suflă aer, acestea se vor apropia. Să se explice fenomenul.

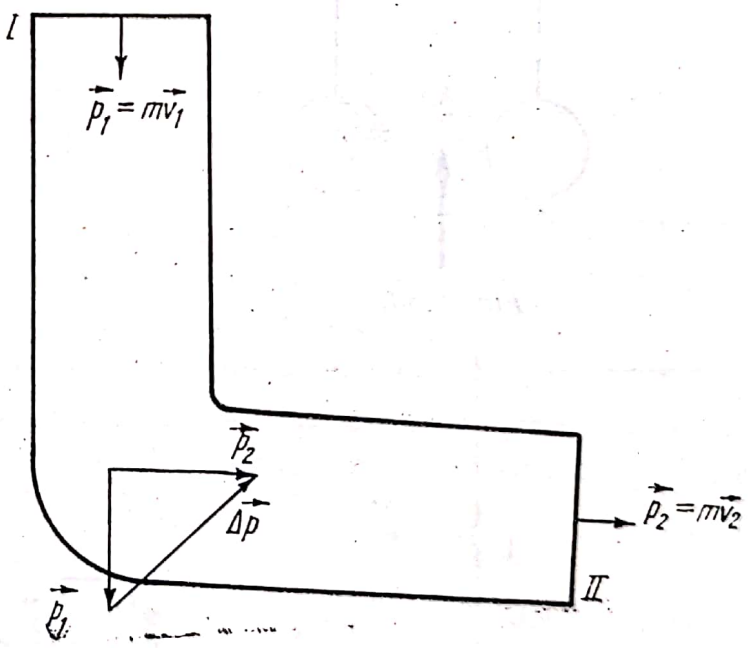


Fig. 8.31. Curgerea apei printr-o conductă îndoită sub un unghi de 90°.

3. Se realizează dispozitivul din figura 8.34, alcătuit dintr-un disc ușor A făcut din carton și așezat în apropierea unui alt disc B prevăzut cu un orificiu pus în legătură cu un tub C. Dacă se suflă aer prin tubul C, discul A se apropie de discul B. De ce?

Scanned with OKEN Scanner

4. Într-un vas cilindric (fig. 8.35) se află o coloană de apă cu înălțimea $h=0{,}3$ m. În peretele lateral al vasului s-a făcut un orificiu, la înălțimea y față de baza vasului. Ce valoare trebuie să aibă y

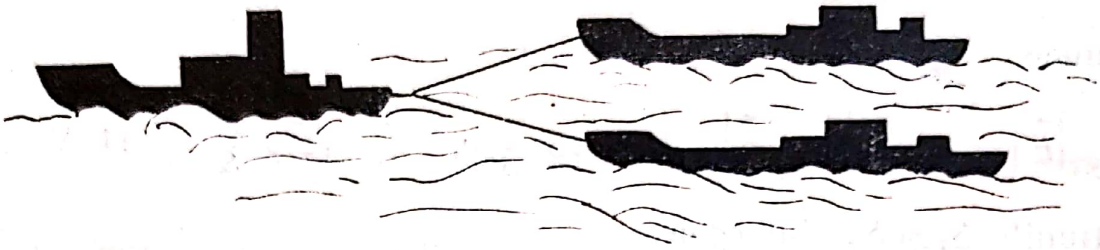


Fig. 8.32.

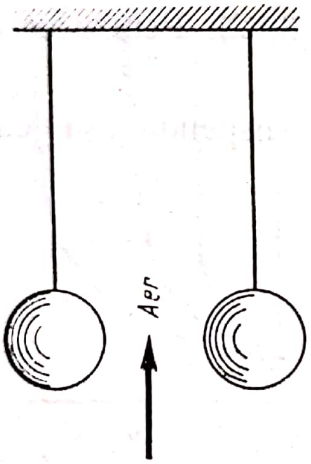


Fig. 8.33.

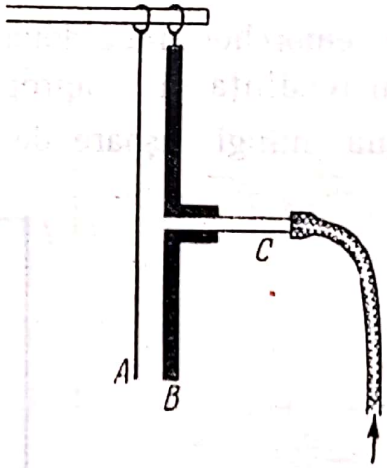


Fig. 8.34.

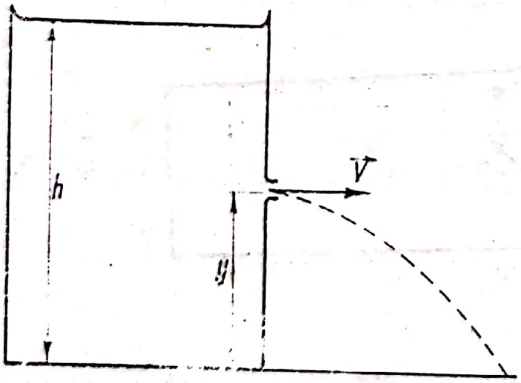


Fig. 8.35.

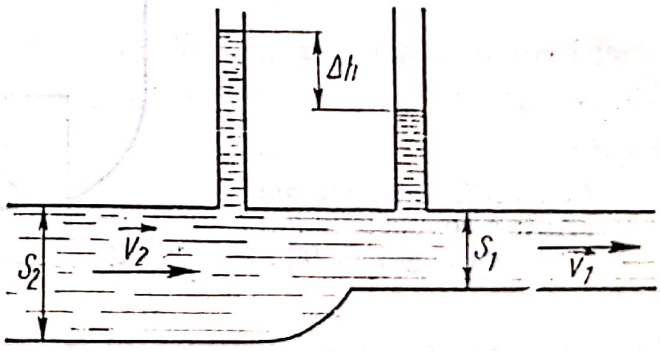


Fig. 8.36.

pentru ca apa care iese din orificiu să cadă pe suportul vasului, la distanța maximă față de vas?

Răspuns: $y = \frac{h}{2} = 0{,}15$ cm

Scanned with OKEN Scanner

5. Printr-o conductă orizontală, cu secţiunea transversală variabilă, curge apă (fig. 8.36). Să se determine debitul de volum al apei ce se scurge prin conductă. Se dau ariile secţiunilor transversale $S_1 = 10^{-3}$ m^2,

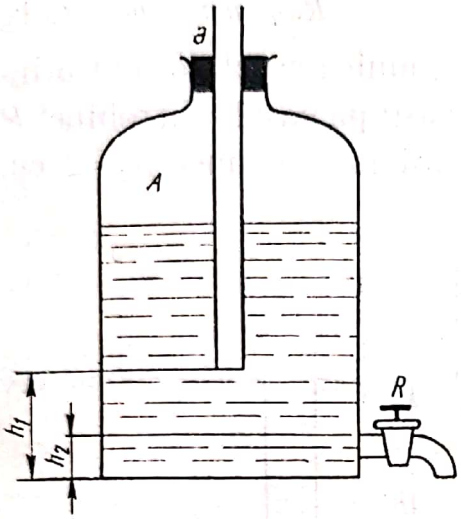


Fig. 8.37.

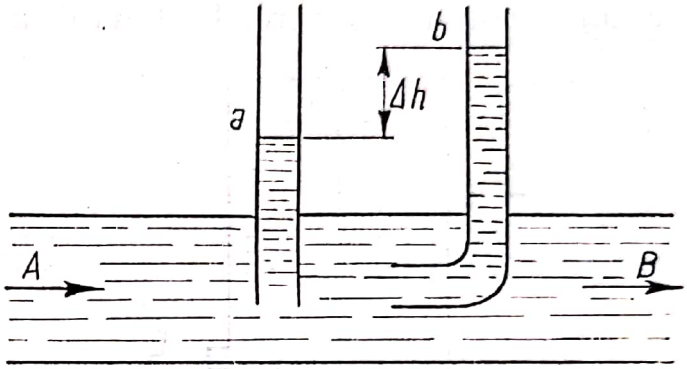


Fig. 8.38.

$S_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^2 şi diferenţa de nivel dintre coloanele de lichid din sondele de presiune montate pe conductă $\Delta h = 0{,}2$ m.

Răspuns: $Q = 2{,}29 \cdot 10^{-3}$ m^3. s^{-1}

6. Baza unui vas cilindric are un orificiu cu secţiunea S_1. În vas se toarnă apă pînă la înălţimea H şi nivelul ei se menţine constant. Să se determine aria secţiunii transversale a jetului de apă, care se scurge din vas la distanţa $3H$ de fundul vasului. Se consideră că apa ce se scurge din vas nu se împrăştie, iar forţele de frecare în lichid sînt neglijabile.

Răspuns: $S = 0{,}5\ S_1$

7. Să se afle cu ce viteză scade nivelul apei dintr-un rezervor cu aria secţiunii transversale $S = 1$ m^2, dacă viteza de scurgere a apei printr-un orificiu, făcut în peretele lateral al rezervorului, este $v = 2$ m/s. Diametrul orificiului este $d = 2$ cm.

Răspuns: $v = 3{,}8 \dfrac{\text{cm}}{\text{min}}$

8. Din furtunul unei pompe de incendiu jetul de apă iese sub un unghi $\alpha = 30°$ faţă de orizontală şi are bătaia $l = 5$ m. Să se determine

cantitatea de apă debitată de pompă în $t=10$ s, dacă aria secțiunii furtunului este $S = 2$ cm². Se neglijează rezistența aerului.

Răspuns: $\Delta m = 15$ kg

9. Un vas A (fig. 8.37), ce conține apă, comunică cu atmosfera printr-un tub de sticlă a, ce trece printr-un dop ce astupă vasul. Un robinet R se află montat în peretele lateral al vasului la înălțimea $h_2=2$ cm

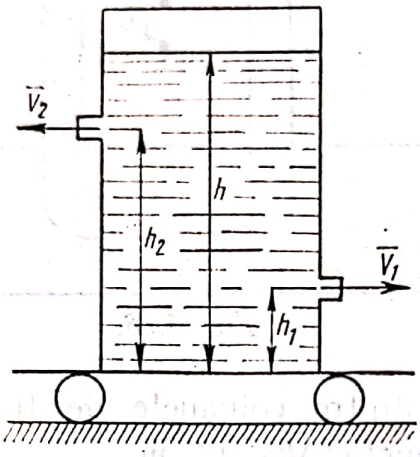


Fig. 8.39.

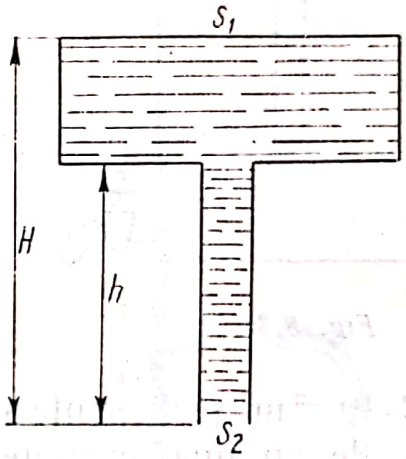


Fig. 8.40.

de baza vasului. Să se determine viteza cu care se scurge apa prin robinetul R cînd capătul inferior al tubului se află la distanța $h_1 = 22$ cm, $h_1 = 2$ cm, $h_1 = 7{,}5$ cm, $h_1 = 10$ cm de baza vasului.

Răspuns: $v_1=0$ m/S; $v_2 = 1{,}04$ m/S; $v_3 = 1{,}25$ m/S

10. Un lichid curge printr-un tub orizontal (fig. 8.38). Diferența dintre nivelurile lichidului din tuburile a și b este $\Delta h = 10$ cm. Diametrele tuburilor sînt identice. Să se determine viteza de scurgere a lichidului prin tubul AB.

Răspuns: $v=1{,}4$ m/s

11. Pe un cărucior se află un vas cilindric în care se află apă pînă la înălțimea h, față de baza cilindrului (fig. 8.39). În peretele cilindrului pe părți diametral opuse sînt făcute două orificii identice, cu secțiunea $S = 10^{-3}$ m². Un orificiu se află la înălțimea $h_1=0{,}25$ m, iar celălalt

Scanned with OKEN Scanner

la înălțimea $h_2 = 0{,}5$ m, față de baza vasului cilindric. Să se determine sensul și intensitatea forței ce trebuie aplicată căruciorului, pentru ca acesta să rămînă în repaus, cînd se deschid orificiile și prin acestea începe să curgă apa.

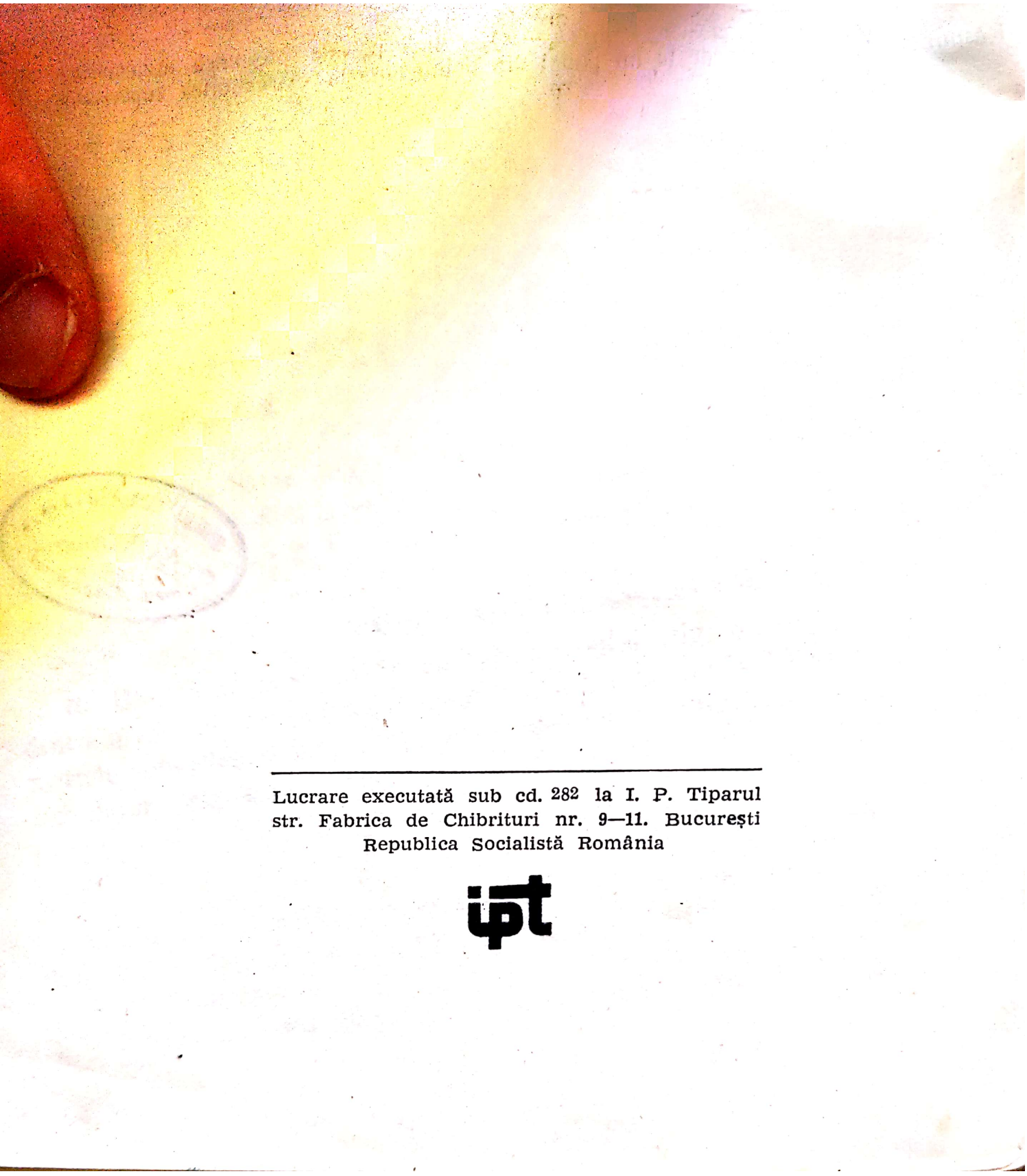
Răspuns: $F = 2\rho Sg\,(h_2 - h_1) = 4{,}9$ N

12. Lichidul dintr-un vas larg cu secțiunea transversală S_1 se scurge printr-un tub îngust cu secțiunea S_2 ($S_2 \ll S_1$), fixat de baza vasului larg (fig. 8.40). Să se determine repartiția pe verticală a presiunii și vitezei în lichidul din vas și din tub.

Răspuns: $V = \sqrt{2gH}$, $p = p_0 - \rho g\,(h - x)$, unde p_0 este presiunea atmosferică și x distanța de la un punct din lichid pînă la extremitatea superioară a tubului.

BIBLIOTECA PERSONALĂ
Nr. .....
Carmen Antonovici

Scanned with OKEN Scanner



Lucrare executată sub cd. 282 la I. P. Tiparul
str. Fabrica de Chibrituri nr. 9—11. București
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner